9.4 EXERCÍCIOS

1. Seja $\alpha = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ uma base de V, um espaço vetorial real com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$.

$$[\mathbf{u}]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2$, a base α é ortonormal?

2. Ache valores para x e y tais que $\begin{bmatrix} x & y \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ seja uma matriz ortogonal.

3. Sejam $\alpha = \{(1, 1), (2, 0)\}$ e $\beta = \{(-1, 0), (2, 1)\}$. A partir das bases α e β construa bases ortonormais, usando o método de Gram-Schmidt. Se estas novas bases forem α' e β' respectivamente, mostre que a matriz de mudança de base $[I]^{\alpha'}_{\beta'}$ é ortogonal.

4. Dada uma matriz $\mathbf{A}$ cujas colunas são vetores ortonormais, prove que $\mathbf{A}$ é ortogonal.

5. Seja $T(x, y, z) = (2x + y, x + y + z, y - 3z)$ de $\mathbf{R}^3$ em $\mathbf{R}^3$ com produto interno canônico.
   a) Mostre que T é um operador auto-adjunto mas não ortogonal.
   b) Se $\mathbf{v} = (2, -1, 5)$ e $\mathbf{w} = (3, 0, 1)$, verifique que $\langle T\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, T\mathbf{w} \rangle$.
   c) Exiba uma base de autovetores de T e verifique que é uma base ortogonal. A partir desta base, escreva uma base ortonormal.

6. Dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{bmatrix}$
   a) Mostre que os autovalores são: a, $b + c$ e $b - c$.
   b) Ache uma base de autovetores.

7. Seja o operador linear $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Exiba uma base ortonormal de autovetores.

8. Mostre que uma transformação ortogonal do plano no plano deixa invariante a distância entre dois pontos, isto é, dados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores quaisquer do plano,

$$\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

(Sugestão: use o teorema 9.3.3 (*d*).)

9. *a*) Mostre que se T é uma transformação ortogonal do plano no plano, sua matriz em relação à base canônica só pode ser da forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ou da forma

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

(Sugestão: 9.3.3 (*d*).)

b) Observe que se a matriz de T for da forma dada por $\mathbf{A}$, T será uma rotação de um ângulo α (veja 5.2.4.). Mostre que $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$ onde $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. ($\mathbf{J}$ é a matriz em relação à base canônica de reflexão no eixo-x. Veja 5.2.2. Conclua finalmente, usando composição de funções, que se a transformação T for dada por $\mathbf{B}$, T será uma reflexão através de uma reta do plano que passa pela origem.

10. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão n, com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e $T: V \to V$ um operador linear auto-adjunto. Se α for uma base ortonormal de V, chamemos de $\mathbf{A}$ a matriz $[T]^\alpha_\alpha$. Consideremos a transformação linear $T_\mathbf{A}: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ dada por

$$T_\mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

onde $x_i \in \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ = conjunto dos números complexos) e o produto interno canônico em $\mathbf{C}^n$, dado por

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_\mathbf{C} = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \ldots + x_n\bar{y}_n$$

Biblioteca de Ciência & Tecno

para $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ (Veja 8.6.)

a) Mostre que $T_{\mathbf{A}}$ tem sempre autovalores. (Sugestão: Lembre-se de que um polinômio sempre tem raízes se estivermos trabalhando sobre os números complexos.)

b) Mostre que $\langle T_{\mathbf{A}}\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_c = \langle \mathbf{v}, T_{\mathbf{A}}\mathbf{w}\rangle_c$ para quaisquer $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{C}^n$. (Sugestão: Siga a idéia do teorema 9.2.3.)

c) Mostre que os autovalores de $T_{\mathbf{A}}$ são necessariamente reais. (Sugestão: Chame de λ um autovalor de $T_{\mathbf{A}}$ com autovetor $\mathbf{v}$. Lembre que para um número complexo λ ser real, basta que ele seja igual ao seu conjugado. Desenvolva então $\langle T_{\mathbf{A}}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_c$ de dois modos distintos, utilizando o item (*b*) e as propriedades de produto interno sobre um espaço vetorial complexo. Veja 8.6.)

d) Mostre que os autovalores de T e $T_{\mathbf{A}}$ são os mesmos.

e) Utilizando os resultados anteriores, conclua que um operador linear auto-adjunto tem autovalores e eles são necessariamente reais.

11. Seja V um espaço vetorial real de dimensão n, $T: V \to V$ um operador linear auto-adjunto e $\mathbf{v} \in V$ um autovetor de T.

a) Mostre que $[\mathbf{v}]$, o espaço gerado por $\mathbf{v}$, é invariante por aplicação do operador T, isto é, se $\mathbf{w} \in [\mathbf{v}]$, então $T\mathbf{w} \in [\mathbf{v}]$.

b) Mostre que $[\mathbf{v}]^{\perp}$, o complemento ortogonal de $[\mathbf{v}]$ (veja 8.5), é invariante por aplicação do operador T, isto é, se $\mathbf{w} \in [\mathbf{v}]^{\perp}$, então $T\mathbf{w} \in [\mathbf{v}]^{\perp}$ e portanto T induz um operador linear $T_1 : [\mathbf{v}]^{\perp} \to [\mathbf{v}]^{\perp}$
$$\mathbf{w} \to T\mathbf{w}$$

c) Mostre que o operador T_1 definido no item (*b*) é auto-adjunto.

d) Mostre que todo autovetor $\mathbf{w}$ de T_1 com autovalor δ também é autovetor de T com o mesmo autovalor δ.

12. Demonstre o teorema 9.3.1, isto é, se $T: V \to V$ um operador linear auto-adjunto, então existe uma base ortonormal de autovetores de T. (Sugestão: Faça por indução finita sobre a dimensão de V, utilizando os Exercícios 10 e 11.)

13. *a*) Dê a transformação linear que descreve o movimento rígido que leva o segmento de extremos (-6, 2) e (-1, 2) no segmento de extremos (-2, 6) e (1, 2) respectivamente.

b) Mostre que esta transformação é uma rotação e encontre seu ângulo.

14. *a*) Use a definição 9.2.1 e o teorema 9.3.1 para mostrar que um operador é auto-adjunto se e somente se existir uma base β de vetores ortonormais em relação à qual $[T]^{\beta}_{\beta}$ é diagonal.

b) Use agora o resultado acima para dar uma caracterização geométrica das transformações auto-adjuntas do plano no plano. (Observe que $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ e note o efeito geométrico de cada uma destas duas últimas matrizes.

c) Analise separadamente em *b*) os casos

i) $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

ii) $a = 0$ e $b \neq 0$.

iii) $a = 0$ e $b = 0$.

d) Seja α a base canônica e $[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

i) Diagonalize o operador T. (Escolha uma base ortonormal.)

ii) Interprete geometricamente T usando *b*).

iii) Teste sua interpretação geométrica, verificando qual é a imagem por T de um quadrado de vértices (0, 0), (1, 1), (0, 2) e (-1, 1).

9.4.1 Respostas

1. Não, pois $< u, v > \neq 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 + 3\,(-3)$.
$$= -1$$

3. $\alpha' = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$ $\qquad$ $\beta' = \{(-1, 0), (0, 1)\}$

$$[I]^{\alpha'}_{\beta'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad [I]^{\alpha'}_{\beta'} \cdot ([I]^{\alpha'}_{\beta'})' = I$$

5. $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ é simétrica. Logo T é auto-adjunto. Como as colunas de $[T]$ não são vetores ortonormais, T não é ortogonal.

7. $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$

$v_1 = (1, -2, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$

$\beta = \{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})\}$

9. *a*) Sejam $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $v = (x, y)$ qualquer T ortogonal $\Rightarrow \|T_{(v)}\|$

$= ||v||$ etc., escolhendo vários vetores v para gerar um sistema de equações que fornece a, b, c e d.

b) Sugestão: a inclinação da reta pela origem tem inclinação de $\frac{\alpha}{z}$. Ache a imagem do ponto (x, y), onde $v = (x, y)$, e mostre que esta imagem é exatamente $B \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, ou seja, T_v.

11. *a*) $w \in [v] \Longrightarrow \exists u \in R$ tal que $w = uv$.
$Tw = T(uv) = uTv = u \cdot \lambda v$ onde λ é o autovalor associado a v. Mas $(u\lambda)v \in [v]$, e portanto $Tw \in [v]$.

b) **Seja $w \in [v]^{\perp}$. Então $< w, v > = 0$.**
Como $< Tw, v > = < w, Tv >$ pois T é auto-adjunto, e
$Tv = \lambda v$, $< Tw, v > = < w, \lambda v > = \lambda < w, v > = 0$
Portanto, $Tw \in [v]^{\perp}$.

c) Seja $\beta = \{\frac{v}{||v||}, v_2, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de V.
Então $\beta_1 = \{v_2, ..., v_n\}$ é uma base de $[v]^{\perp}$.
$[T]_{\beta}$ é simétrica pois T é auto-adjunto e da forma $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Então $[T_1]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ é simétrica e T_1 é auto-adjunto.

d) $Tw = T_1 w$, pois $w \in [v]^{\perp}$, e $T_1 w = \delta w$.
Então δ é autovalor de T e w um autovetor associado.

13. Seja $[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Então $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ e

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Logo, $[T] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

onde $\alpha = -\arccos\frac{3}{5}$.

Leituras Sugeridas e Referências

1 Gelfand, I. M.; *Lectures in Linear Algebra*; Interscience Publishers, New York, 1961.
2 Halmos, P.; *Finite Dimensional Vector Spaces*; Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1958.
3 Hoffman, K. e Kunze, R.; *Álgebra Linear*; Editora Polígono, São Paulo, 1971.

10

FORMAS LINEARES, BILINEARES E QUADRÁTICAS

10.1 FORMAS LINEARES

Suponha que uma pessoa necessite comprar ferro, chumbo e cobre a cinco, seis e quatro cruzeiros o quilo, respectivamente. Se esta pessoa compra x quilos de ferro, y quilos de chumbo e z quilos de cobre, podemos representar esta compra pelo vetor (x, y, z) e o custo total é dado pela expressão $5x + 6y + 4z$. Observe que a "função custo"

$$c: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$(x, y, z) \longmapsto 5x + 6y + 4z$$

é uma transformação linear (verifique) cujo contra-domínio é um espaço vetorial muito particular, pois é o conjunto dos números reais. Transformações lineares deste tipo aparecem muito e por isso recebem um nome especial.

10.1.1 Definição: Seja V um espaço vetorial real. Uma *forma linear* é uma transformação linear $f: V \longrightarrow \mathbf{R}$.