UMA INTRODUÇÃO ÀS C*-ÁLGEBRAS

Mini-curso ministrado na Primeira Bienal de Matemática
Sociedade Brasileira de Matemática
Universidade Federal de Minas Gerais

Ruy Exel
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina

ÍNDICE

INTRODUÇÃO 1

A teoria das Álgebras de Operadores tem seu início em 1929 com o pioneiro trabalho [**9**], a partir do qual John von Neumann, um dos maiores cientistas do século XX, estabeleceu as bases matemáticas da Mecânica Quântica. As álgebras estudadas por von Neumann, hoje apropriadamente chamadas de *álgebras de von Neumann*, são certas sub-álgebras da álgebra $\mathscr{B}(H)$ formada por todos os operadores limitados em um espaço de Hilbert H.

Em 1943, num artigo de importância fundamental ([**6**]), I. M. Gelfand e M. Neumark obtiveram uma caracterização abstrata para as álgebras de operadores estudadas por von Neumann, isto é, obtiveram uma lista de axiomas cujos modelos são precisamente as sub-álgebras fechadas e auto-adjuntas de $\mathscr{B}(H)$.

A partir de então um vertiginoso avanço se seguiu no qual aplicações fundamentais foram obtidas nas mais diversas áreas da Matemática e Física (teoria dos nós, mecânica estatística, teoria quântica de campos, representação de grupos, sistemas dinâmicos, folheações, teoria dos grafos, quase-cristais, geometria não-comutativa).

Embora haja hoje uma vasta literatura sobre o assunto, incluindo inúmeros livros em nível mais ou menos elementar ([**1**], [**2**], [**3**], [**4**], [**5**], [**7**], [**8**], [**10**], [**13**], [**14**]), não há um único texto em língua portuguesa sob o tema.

O objetivo destas notas é portanto dar um primeiro e modesto passo no sentido de suprir esta deficiência, apresentando um caminho tão elementar quanto possível para uma compreensão detalhada do Teorema de Gelfand e Neumark, citado acima, sobre a caracterização abstrata das álgebras de operadores.

O pré-requisito para a leitura deste texto é um bom conhecimento sobre aspectos básicos de Análise Funcional, Variáveis Complexas e Álgebra.

Uma das idiossincrasias da teoria que pretendemos apresentar é a questão sobre se a álgebra tem ou não unidade. A grosso modo pode-se dizer que os resultados para álgebras com unidade quase sempre se aplicam para álgebras sem unidade, naturalmente com alterações apropriadas, porém muitas vezes à custa de um razoável esforço extra.

Com o objetivo de enfatizar a essência da teoria, evitando dificuldades técnicas que obscureceriam as idéias centrais, optamos por nos restringir ao caso com unidade, ocasionalmente deixando o caso geral para os exercícios.

Nesta seção nós vamos estudar o conceito de álgebra normada e para isto partiremos da premissa de que o leitor tem alguma familiaridade com o conceito de *álgebra* sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos[1]. Não custa repetir: uma álgebra A sobre $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial complexo equipado com uma operação bilinear e associativa:

$$\bullet : A \times A \to A$$

chamada *operação de multiplicação*. Como sempre, ao invés da matematicamente correta porém excessivamente rígida notação

$$\bullet(a, b),$$

nós usamos simplesmente ab para denotar o resultado da operação de multiplicação quando aplicada ao par (a, b).

2.1. Definição. Uma *álgebra normada* é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ equipada com uma função *norma*

$$a \in A \mapsto \|a\| \in \mathbb{R}$$

que faz com que A seja um espaço normado, ou seja, para todo $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tenhamos:

(i) $\|a\| \geq 0$,

(ii) $\|a\| = 0 \;\Rightarrow\; a = 0$,

(iii) $\|\lambda a\| = |\lambda| \, \|a\|$, onde $|\lambda|$ indica o módulo do número complexo λ,

(iv) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$,

e além disso obedeça ao seguinte axioma envolvendo a operação de multiplicação:

(v) $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$.

Vejamos alguns exemplos de álgebras normadas:

2.2. Exemplo. Seja $\mathbb{C}[X]$ a álgebra dos polinômios complexos na variável X. Dado

$$p = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k \in \mathbb{C}[X],$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda_k \in \mathbb{C}$ para $k = 0, \ldots, n$, defina $\|p\| = \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k|$. Não é difícil provar que $\mathbb{C}[X]$, equipado com a multiplicação usual de polinômios e a norma definida acima, é uma álgebra normada.

[1] Embora o conceito de álgebra se aplique para qualquer corpo, a teoria de álgebras de Banach tem uma preferência especial pelo corpo dos números complexos!

Muitas vezes podemos ter mais de uma norma sobre uma mesma álgebra complexa tornando-a uma álgebra normada:

2.3. Exemplo. Seja $\mathbb{C}[X]$ como acima mas desta vez defina a norma de um elemento $p \in \mathbb{C}[X]$ por

$$\|p\| = \sup_{x\in[0,1]} |p(x)|. \tag{$\dagger$}$$

Esta nova norma satisfaz a todos os axiomas de (2.1) e portanto faz de $\mathbb{C}[X]$ uma álgebra normada.

Não há nada de especial sobre o intervalo $[0,1]$ neste exemplo: qualquer outro conjunto limitado e infinito de números complexos pode substituir o intervalo $[0,1]$ em ($\dagger$) com conclusões semelhantes.

2.4. Exemplo. Seja n um inteiro positivo e seja $M_n(\mathbb{C})$ o conjunto de todas as matrizes $n\times n$ sobre $\mathbb{C}$. É bem sabido que $M_n(\mathbb{C})$ é uma álgebra complexa com a operação usual de multiplicação de matrizes. Existem muitas normas que fazem com que $M_n(\mathbb{C})$ seja uma álgebra normada. A mais importante de todas é definida por

$$\|a\| = \sup\big\{\|av\|_2 : v \in \mathbb{C}^n,\ \|v\|_2 \le 1\big\}, \quad \forall\, a \in M_n(\mathbb{C}),$$

onde av representa o produto da matriz a pelo vetor (= matriz coluna $n\times 1$) v. Além disto usamos na definição acima a norma euclidiana $\|\cdot\|_2$ para vetores.

Uma outra norma em $M_n(C)$, importante em algumas aplicações, é dada por

$$\|a\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

onde estamos assumindo que a é a matriz $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$.

2.5. Exemplo. Seja X um espaço topológico localmente compacto e seja $C_0(X)$ o espaço vetorial complexo de todas as funções contínuas $f : X \to \mathbb{C}$ que se anulam no infinito[2]. Dadas f e g em $C_0(X)$ defina uma nova função, denotada por fg, através da fórmula

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad \forall\, x \in X.$$

Não é difícil provar que, com esta operação de multiplicação, $C_0(X)$ torna-se uma álgebra complexa. Se além disto definirmos a norma de uma função $f \in C_0(X)$ por

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

teremos mais um exemplo de álgebra normada.

[2] Diz-se que uma função $f : X \to \mathbb{C}$ se anula no infinito quando para todo $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K \subseteq X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \notin K$. Quando X é compacto, a possibilidade de tomarmos $K = X$ nos diz que toda função se anula no infinito!

Uma álgebra normada A é, como o seu próprio nome indica, um espaço normado e portanto podemos nos referir à *distância* entre dois elementos a e b de A, isto é

$$d(a,b) = \|a-b\|.$$

Portanto todos os conceitos relativos aos espaços métricos passam a ter relevância no estudo das álgebras normadas. Um dos conceitos cruciais é a completitude, isto é a propriedade de que toda sequência de Cauchy é convergente. Isto motiva a seguinte:

2.6. Definição. Uma *álgebra de Banach* é uma álgebra normada completa.

Dentre os exemplos citados acima apenas (2.4) e (2.5) são álgebras de Banach. No primeiro caso esta afirmação decorre do fato de que todo espaço normado de dimensão finita é completo e no segundo, essencialmente de que o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua.

Nenhuma das outras álgebras mencionadas acima são completas devido ao fato que um espaço de Banach jamais tem dimensão algébrica infinita enumerável.

Na teoria dos espaços normados nós aprendemos que dado um espaço normado V que não é completo existe um único (a menos de isometria) espaço completo $\bar{V}$ que contém V como subespaço denso. Desta forma, dada uma álgebra normada A que não é completa existe um espaço de Banach $\bar{A}$ que contém A como subespaço denso. Em vista de (2.1.v) a operação de multiplicação de A pode ser estendida de forma única a uma operação de multiplicação em $\bar{A}$ que torna $\bar{A}$ uma álgebra de Banach.

Exercícios do Capítulo 2

A. Verifique que as álgebras dos exemplos acima de fato são álgebras normadas.

B. Prove a afirmação feita após o Exemplo (2.3). É realmente necessário que o conjunto que substitui $[0,1]$ seja infinito?

C. Prove que as álgebras descritas em (2.4) e (2.5) são álgebras de Banach.

D. Prove com detalhes a afirmação feita acima de que completamento de uma álgebra normada é uma álgebra de Banach.

E. Prove que se uma álgebra normada A tem unidade, denotada por 1, então $\|1\| = 0$ (e neste caso $A = \{0\}$) ou $\|1\| \geq 1$.

F. Dada uma álgebra normada A (possivelmente sem unidade), seja $\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ (soma direta de espaços vetoriais) equipada com a operação de multiplicação e norma a seguir:

$$(a,\lambda)(b,\mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$$

$$\|(a,\lambda)\| = \|a\| + |\lambda|,$$

onde $a, b \in A$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Prove que $\widetilde{A}$ é uma álgebra normada com unidade de norma um, que é completa se A o for.

Entre os conceitos mais importantes no estudo de álgebras de Banach estão os conceitos de espectro e resolvente que estudaremos a seguir. Para isto vamos supor, ao longo de todo este capítulo, que A é uma álgebra de Banach com unidade, denotada 1.

É fácil ver que a correspondência

$$\lambda \in \mathbb{C} \mapsto \lambda 1 \in A$$

é injetora (a menos do caso trivial em que $A = \{0\}$) e pode ser utilizada para identificarmos o corpo dos números complexos com uma sub-álgebra de A. Abusando deste ponto de vista nós vamos supor que $\mathbb{C}$ está contido em A, identificando o número complexo λ com o elemento $\lambda 1$ de A, sempre que isto não causar confusão. Em particular, na próxima definição nós vamos nos referir à $\lambda - a$, onde $a \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ quando o figurino mandaria escrevermos $\lambda 1 - a$.

3.1. Definição. Dado $a \in A$ definimos o *resolvente de* a e o como sendo o conjunto $\rho(a)$ dado por

$$\rho(a) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - a \text{ é inversível}\big\}.$$

O espectro de a é definido como sendo o conjunto $\sigma(a)$ dado por $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$, isto é, o complementar de $\rho(a)$.

3.2. Proposição. *Seja $a, b \in A$. Então $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$.*

Prova. Basta provarmos que se $\lambda \neq 0$ então $\lambda - ab$ é inversível se e somente se $\lambda - ba$ é inversível. Suponha então que $\lambda - ab$ é inversível. Afirmamos que

$$c := \lambda^{-1}\Big(1 + b(\lambda - ab)^{-1}a\Big)$$

é o inverso de $\lambda - ba$. De fato

$$c(\lambda - ba) = \lambda^{-1}\Big(1 + b(\lambda - ab)^{-1}a\Big)\ (\lambda - ba) = \lambda^{-1}\Big(\lambda - ba + b(\lambda - ab)^{-1}a(\lambda - ba)\Big) =$$

$$= \lambda^{-1}\Big(\lambda - ba + b(\lambda - ab)^{-1}(\lambda - ab)a\Big) = \lambda^{-1}(\lambda - ba + ba) = 1.$$

Similarmente prova-se que $(\lambda - ba)c = 1$, e portanto $\lambda - ba$ é inversível. Para provarmos a recíproca basta trocar os papéis de a e b. □

O nosso próximo grande objetivo será a demonstração de que o espectro de um elemento é sempre um conjunto compacto e não vazio. Comecemos com o seguinte resultado:

3.3. Lema. *Se $a \in A$ é inversível e $\|a-b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ então b também é inversível e*

$$b^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \big(a^{-1}(a-b)\big)^n \, a^{-1}.$$

Portanto o conjunto dos elementos inversíveis de A é aberto.

Prova. Seja $x = a^{-1}(a-b)$ e observe que $b = a(1-x)$. Para provarmos que b é inversível basta portanto provarmos que $1-x$ é inversível. Observando que por hipótese

$$\|x\| \le \|a^{-1}\| \, \|a-b\| < \|a^{-1}\| \, \|a^{-1}\|^{-1} = 1,$$

temos que a série infinita $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é absolutamente convergente (e portanto convergente pois A é completa). Seja y a sua soma. Então

$$(1-x)y = (1-x)\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n\right) = \lim_{N\to\infty} 1 - x^{N+1} = 1,$$

já que $\|x^{N+1}\| \le \|x\|^{N+1} \to 0$ quando $N \to \infty$. Verificando por meios similares que também $y(1-x) = 1$ concluimos que y é o inverso de $1-x$ como desejado. Segue-se que

$$b^{-1} = (1-x)^{-1}a^{-1} = ya^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \big(a^{-1}(a-b)\big)^n \, a^{-1}. \qquad \square$$

É conveniente provarmos também que a função de inversão é contínua:

3.4. Proposição. *Nas condições de (3.3) temos que*

$$\|b^{-1} - a^{-1}\| \le \frac{\|a^{-1}\|^2 \|a-b\|}{1 - \|a^{-1}\|\|a-b\|},$$

e portanto $\lim\limits_{b\to a} b^{-1} = a^{-1}$. Ou seja, a função de inversão $a \mapsto a^{-1}$ é contínua no seu domínio.

Prova. Usando a expressão obtida acima para b^{-1} temos

$$\|b^{-1} - a^{-1}\| = \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \big(a^{-1}(a-b)\big)^n - 1 \right) a^{-1} \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \big(a^{-1}(a-b)\big)^n \, a^{-1} \right\| \le$$

$$\le \|a^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|a^{-1}\|^n \|a-b\|^n = \frac{\|a^{-1}\|^2 \|a-b\|}{1 - \|a^{-1}\|\|a-b\|}. \qquad \square$$

É imediato verificarmos que, dado $a \in A$, a função

$$\lambda \in \mathbb{C} \mapsto \lambda - a \in A$$

é contínua. A imagem inversa do conjunto *aberto* formado pelos elementos inversíveis de A é portanto um sub-conjunto aberto de $\mathbb{C}$. Mas é claro que este conjunto é precisamente o resolvente de a. Isto prova, portanto, a seguinte:

3.5. Proposição. *O espectro de um elemento $a \in A$ é um conjunto fechado.*

Para provarmos que o espectro é compacto, como mencionado acima, basta agora provarmos que é limitado.

3.6. Proposição. *Se $x \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $|\lambda| > \|x\|$ então $\lambda - x$ é inversível e*

$$(\lambda - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n.$$

Em consequência o espectro de x está contido na bola (no plano complexo) centrada em zero e de raio $\|x\|$, e portanto é compacto.

Prova. Pondo $a = \lambda$ e $b = \lambda - x$ note que

$$\|a - b\| = \|x\| < \|\lambda\| = \|\lambda^{-1}\|^{-1}.$$

O resultado então segue imediatamente de (3.3). $\square$

Resta-nos agora provarmos que o espectro de um elemento é sempre não vazio, o que é na verdade um resultado de um grau de dificuldade bastante superior ao que vimos até agora no sentido que precisaremos invocar um teorema profundo da teoria das funções analíticas.

3.7. Definição. A *função resolvente* de um elemento $a \in A$ é a função $R_a : \rho(a) \to A$ dada por

$$R_a(\lambda) = (\lambda - a)^{-1}, \quad \forall\, \lambda \in \rho(a).$$

Uma das principais propriedades da função resolvente é dada no nosso próximo resultado:

3.8. Proposição. *Seja $a \in A$.*

(i) *Dados $\lambda \neq \mu$ em $\rho(a)$ temos*

$$\frac{R_a(\mu) - R_a(\lambda)}{\mu - \lambda} = -(\mu - a)^{-1}(\lambda - a)^{-1}.$$

(ii) *Para qualquer funcional linear contínuo $\varphi \in A^*$ (dual topológico de A) a composição $\varphi \circ R_a$ é uma função analítica em $\rho(a)$.*

Prova. Dados $\lambda, \mu \in \rho(a)$ temos

$$R_a(\mu) - R_a(\lambda) = (\mu - a)^{-1} - (\lambda - a)^{-1} =$$

$$= (\mu - a)^{-1}\big((\lambda - a) - (\mu - a)\big)(\lambda - a)^{-1} = (\mu - a)^{-1}(\lambda - \mu)(\lambda - a)^{-1},$$

donde segue a primeira afirmação. Dado $\varphi \in A^*$ temos

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{\varphi(R_a(\mu)) - \varphi(R_a(\lambda))}{\mu - \lambda} = \lim_{\mu \to \lambda} -\varphi\big((\mu - a)^{-1}(\lambda - a)^{-1}\big) = -\varphi\big((\lambda - a)^{-2}\big),$$

onde o último passo segue de (3.4). Portanto $\varphi \circ R_a$ é de fato analítica. $\square$

É curioso observar a similaridade entre a conclusão final do resultado acima, isto é que,

$$\frac{d}{d\lambda}\varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big) = -\varphi\big((\lambda - a)^{-2}\big),$$

e o resultado bem conhecido segundo o qual

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda - a)^{-1} = -(\lambda - a)^{-2},$$

para $a \in \mathbb{C}$.

Estamos agora em condições de provar o resultado principal desta seção:

3.9. Teorema. *Dado $a \in A$ temos que $\sigma(a)$ é um conjunto compacto e não vazio.*

Prova. Tendo já provado que $\sigma(a)$ é compacto provarmos que não é vazio por absurdo. Supondo que $\sigma(a)$ é vazio, e portanto que $\rho(a) = \mathbb{C}$, tome φ em A^*. Então, por (3.8) a composta $\varphi\circ R_a$ é uma função inteira. Por outro lado, usando a expressão para $(\lambda - a)^{-1}$ fornecida por (3.6) temos que

$$\|(\lambda - a)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{-n-1}\|a\|^n = \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|a\|}{|\lambda|}\right)^n = \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1 - \frac{\|a\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|a\|},$$

para $|\lambda| > \|a\|$, o que prova que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} R_a(\lambda) = 0$ e portanto também que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \varphi(R_a(\lambda)) = 0$.

Por um lado isto implica que $\varphi\circ R_a$ é uma função limitada. Invocando o Teorema de Liouville concluimos portanto que $\varphi\circ R_a$ é constante. Por outro lado esta constante deve necessariamente ser nula já que o seu limite no infinito é nulo. Assim temos que $\varphi(R_a(\lambda)) = 0$ para todo φ e todo λ. Usando agora o Teorema de Hahn-Banach temos que $R_a(\lambda) = 0$ para todo λ o que é um flagrane absurdo uma vez que um inverso ($R_a(\lambda)$ é o inverso de $\lambda - a$) é necessariamente inversível e portanto não nulo. ☐

Não é de se estranhar que o Teorema de Liouville tenha uma participação importante no resultado acima. De fato, quando consideramos $A = M_n(\mathbb{C})$ (veja exemplo (2.4)), o resultado recém provado nos diz que o polinômio característico de qualquer matriz complexa tem raízes! O leitor provavelmente se recorda da demonstração de que o corpo dos números complexos é algébricamente fechado (i.e todo polinômio complexo tem raíz) usando-se justamente o Teorema de Liouville!

3.10. Proposição. *Seja $a \in A$ e seja $f(z) = p(z)/q(z)$ uma função racional, isto é, f é o quociente do polinômio p pelo polinômio q. Suponha que q não se anula em $\sigma(a)$. Então $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.*

Prova. Note que como q não se anula em $\sigma(a)$ então q é um produto de fatores lineares do tipo $(z - \lambda)$ onde $\lambda \in \rho(a)$. Assim $q(a)$ é inversível e portanto o quociente $p(a)/q(a)$ está bem definido.

Seja $\lambda \in \sigma(a)$. Observando que o polinômio g definido por

$$g(z) = p(\lambda)q(z) - p(z)q(\lambda), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

se anula para $z = \lambda$, sabemos que existe um polinômio h tal que $g(z) = (z - \lambda)h(z)$ e portanto $g(a) = (a - \lambda)h(a)$. Temos portanto que

$$f(\lambda) - f(a) = \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} - \frac{p(a)}{q(a)} = \frac{p(\lambda)q(a) - p(a)q(\lambda)}{q(a)q(\lambda)} =$$

$$= \frac{g(a)}{q(a)q(\lambda)} = (a - \lambda)\frac{h(a)}{q(a)q(\lambda)} = \frac{h(a)}{q(a)q(\lambda)}(a - \lambda).$$

Uma vez que $a - \lambda$ não é inversível temos que $f(\lambda) - f(a)$ tampouco é inversível e portanto $f(\lambda) \in \sigma(f(a))$, o que prova que $f(\sigma(a)) \subseteq \sigma(f(a))$.

Para provarmos a inclusão no sentido inverso, isto é, que $\sigma(f(a)) \subseteq f(\sigma(a))$, seja $\lambda \in \sigma(f(a))$. Seja g o polinômio dado por $g = \lambda q - p$, que pode ser fatorado como

$$g(z) = \lambda_0(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\ldots(z - \lambda_n),$$

onde $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Temos

$$\lambda - f(a) = \lambda - \frac{p(a)}{q(a)} = \frac{\lambda q(a) - p(a)}{q(a)} = \frac{g(a)}{q(a)} = \frac{\lambda_0(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)\ldots(a - \lambda_n)}{q(a)}.$$

Dado que $\lambda \in \sigma(f(a))$ vemos que a expressão acima representa um elemento não inversível. Desta forma temos que $\lambda_i \in \sigma(a)$ para algum $i = 1, \ldots, n$. Portanto, dado que $g(\lambda_i) = 0$, temos que $\lambda q(\lambda_i) = p(\lambda_i)$ ou

$$f(\lambda_i) = \frac{p(\lambda_i)}{q(\lambda_i)} = \lambda.$$

Segue-se que $\lambda \in f(\sigma(a))$. $\square$

Exercícios do Capítulo 3

A. Onde está o erro do seguinte argumento: considere o corpo $\mathbb{Q}$ (não comutativo) dos quatérnios e considere $\mathbb{C}$ como subcorpo de $\mathbb{Q}$. Seja a qualquer elemento de $\mathbb{Q}$ que não é um número complexo, por exemplo j ou k. Note que para todo complexo λ temos que $\lambda - a$ não é nulo e portanto é inversível. Segue-se que $\sigma(a) = \emptyset$ contrariando (3.9)?!

B. Seja A a álgebra do exemplo (2.2). Descreva o espectro de cada elemento de A.

C. Seja A a álgebra do exemplo (2.5), onde supomos que X é compacto e portanto que A tem unidade. Dado $f \in A$ prove que $\sigma(f) = f(X)$.

D. Dado um sub-conjunto compacto não vazio S do plano complexo encontre um exemplo de uma álgebra de Banach que contenha um elemento cujo espectro é S.

E. Dado um sub-conjunto S do plano complexo encontre um exemplo de uma álgebra (não necessariamente normada) que contenha um elemento cujo espectro é S.

F. Seja $\mathbb{K}$ uma extensão de $\mathbb{C}$ (isto é, um corpo que contém $\mathbb{C}$) visto como uma álgebra complexa da maneira usual. Prove que não existe norma que faça de $\mathbb{K}$ uma álgebra normada (e muito menos de Banach!).

G. Seja A uma álgebra de Banach e seja a um elemento de A. Suponha que

$$a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = 0,$$

onde $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$. Prove que $\sigma(a)$ está contido no conjunto das raízes do polinômio $p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$.

H. Seja A uma álgebra de Banach e seja a um elemento idempotente não trivial de A, isto é, $0 \neq a \neq 1$ e $a^2 = a$. Prove que $\sigma(a) = \{0, 1\}$.

Como no capítulo anterior A denotará uma álgebra de Banach com unidade. Passemos imediatamente à definição do conceito central deste capítulo:

4.1. Definição. O *raio espectral* de um elemento $a \in A$ é definido por

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Note que (3.6) nos diz que $r(a) \le \|a\|$ para todo $a \in A$.

Em se tratando da invertibilidade de $\lambda - a$ o Teorema (3.6) nos dá uma fórmula explícita para $(\lambda - a)^{-1}$ quando $|\lambda| > \|a\|$ através de uma série absolutamente convergente. Por outro lado segue da definição de raio espectral que $\lambda - a$ é inversível para $|\lambda| > r(a)$ e portanto fica colocada a questão sobre o comportamento da série em (3.6) quando λ está na corôa definida pelas inequações

$$r(a) < |\lambda| \le \|a\|,$$

que pode (exemplos garantem) ser não vazia. É nossa intenção provar que a série mencionada converge aí também.

4.2. Lema. *Para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *com* $|\lambda| > r(a)$ *a série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n$ *converge absolutamente para* $(\lambda - a)^{-1}$.

Prova. Seja $\varphi \in A^*$ e considere a função $f = \varphi \circ R_a$ que é analítica em $\rho(a)$ por (3.8). Por (3.6) temos que

$$f(\lambda) = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \varphi(a^n), \tag{†}$$

para $|\lambda| > \|a\|$. Note porém que f é analítica para $|\lambda| > r(a)$ e portanto segue de um conhecido resultado sobre funções analíticas [**12**: 10.6] que a série (†) de fato converge para $|\lambda| > r(a)$. Em particular

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda^{-n} \varphi(a^n)| < \infty,$$

o que implica que o conjunto $\{\lambda^{-n} a^n : n \in \mathbb{N}\}$ é fracamente limitado e portanto limitado pelo princípio da limitação uniforme. Existe portanto uma constante $K_\lambda > 0$ tal que

$$\|\lambda^{-n} a^n\| \le K_\lambda, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dado $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ com $|\lambda_0| > r(a)$ tome $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ com $|\lambda_0| > |\lambda_1| > r(a)$. Então

$$\|\lambda_0^{-n} a^n\| = \|\lambda_1^{-n} a^n\| \left(\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_0|}\right)^n \le K_{\lambda_1} \left(\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_0|}\right)^n,$$

provando a convergência absoluta da série do enunciado em λ_0 uma vez que $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_0|} < 1$. $\square$

Podemos agora apresentar o resultado mais importante deste capítulo:

4.3. Teorema. *Dado $a \in A$ temos que*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n}.$$

Em particular o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$ existe.

Prova. Seja $\lambda \in \sigma(a)$. Dado $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\lambda^n - a^n =$$

$$= (\lambda - a)(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}a + \cdots + \lambda a^{n-2} + a^{n-1}) =$$

$$= (\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}a + \cdots + \lambda a^{n-2} + a^{n-1})(\lambda - a),$$

e portanto $\lambda^n - a^n$ não é inversível (se o fosse $\lambda - a$ também seria). Segue portanto que $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ de onde $|\lambda^n| \leq \|a^n\|$ por (3.6) ou, equivalentemente,

$$|\lambda| \leq \|a^n\|^{1/n}.$$

Tomando o supremo para $\lambda \in \sigma(a)$ e o ínfimo para $n \in \mathbb{N}$ concluimos que

$$r(a) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n}.$$

Dado λ com $|\lambda| > r(a)$ sabemos por (4.2) que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n}a^n$ converge e, em particular, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^{-n}a^n = 0$. Portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ temos $\|\lambda^{-n}a^n\| < 1$ ou seja

$$\|a^n\|^{1/n} < |\lambda|.$$

Tomando o limite superior em n e o ínfimo para $|\lambda| > r(a)$ concluimos que

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \leq r(a),$$

o que, aliado à conclusão obtida acima, dá

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \leq r(a) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n},$$

de onde a conclusão segue facilmente. $\square$

Exercícios do Capítulo 4

A. Para um elemento a da álgebra do exemplo (2.5), com X compacto, prove que $r(a) = \|a\|$.

B. Considere a matriz $n \times n$ dada por

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule o raio espectral de a e verifique diretamente a validade dos Teoremas (4.2) e (4.3) para a.

C. Um elemento a de uma álgebra de Banach é dito *nilpotente* se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a^k = 0$, e *topologicamente nilpotente* se $\lim\limits_{k\to\infty} \|a^k\|^{1/k} = 0$ (equivalentemente se $r(a) = 0$). Prove que um elemento topologicamente nilpotente de $M_n(\mathbb{C})$ é necessariamente nilpotente.

***D.** O fato de que o limite coincide com o ínfimo para a sequência $\{\|a^n\|^{1/n}\}_n$ pode levá-lo a crer que esta é uma sequência decrescente. Dê um exemplo para provar que isto não é verdade.

Nos capítulos acima tratamos do espectro de um elemento de uma álgebra de Banach. Agora vamos tratar do espectro de uma álgebra. Inicialmente o leitor provavelmente não verá ligação entre estes conceitos e portanto o uso da palavra "espectro" em ambas as situações poderá parecer injustificado. No seu devido tempo, porém, veremos que de fato existe uma relação muito forte entre o espectro de um elemento e o espectro de uma álgebra.

5.1. Definição. Dadas álgebras de Banach A e B diremos que uma função $\varphi : A \to B$ é um *homomorfismo* se φ for linear e além disto

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

para todo $a, b \in A$. O *espectro de* A é definido como sendo o conjunto $\widehat{A}$ formado por todos os homomorfismos não nulos de A em $\mathbb{C}$.

Nunca é demais insistir que, apesar do fato que a função nula é um homomorfismo legítimo de A em $\mathbb{C}$, esta é excluida de $\widehat{A}$ por decreto!

Note que não assumimos nenhuma hipótese sobre a continuidade dos homomorfismos φ acima. Entretanto temos:

5.2. Proposição. *Seja A uma álgebra de Banach. Se $\varphi : A \to \mathbb{C}$ é um homomorfismo então $|\varphi(a)| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$ e portanto φ é contínuo.*

Prova. Acrescentanto uma unidade em A (cf. exercício (2.F)) podemos supor que A tem unidade e que $\varphi(1) = 1$. Dado $a \in A$ note que $a - \varphi(a)$ pertence ao núcleo de φ, que é um ideal de A, e portanto não pode ser inversível. Desta forma $\varphi(a) \in \sigma(a)$ donde por (3.6) temos que $|\varphi(a)| \leq \|a\|$. □

Isto posto vemos que $\widehat{A}$ é um subconjunto da bola unitária do dual A^*. Sendo assim podemos coniderar $\widehat{A}$ como espaço topológico com a topologia induzida pela topologia da convergência pontual (também chamada de topologia fraca*) de A^*.

5.3. Proposição. *Seja A uma álgebra de Banach. O espectro $\widehat{A}$ é um espaço localmente compacto com a topologia da convergência pontual. Caso A tenha unidade $\widehat{A}$ é compacto.*

Prova. Considere o conjuto S formado por todos os homomorfismos de A em $\mathbb{C}$ (não sendo excluído o homomorfismo nulo desta vez). É fácil ver que S é fechado na topologia da convergência pontual e portanto compacto pelo Teorema de Alaoglu. Como $\widehat{A}$ resulta da remoção de um ponto (o homomorfismo nulo) do espaço compacto S, concluimos que $\widehat{A}$ é localmente compacto.

No caso em que A tem unidade note que dado $\varphi \in S$ temos que

$$\varphi \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(1) = 1.$$

Desta forma vemos que $\widehat{A}$ é fechado em S (equivalentemente o homomorfismo nulo é um ponto isolado de S) e portanto compacto. □

Suponha, de agora em diante, que A é uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Nosso objetivo a seguir é mostrar uma importante relação entre o espectro de um elemento $a \in A$ e o espectro de A. Conforme vimos na prova de (5.2), para todo $\varphi \in \widehat{A}$ temos que $\varphi(a) \in \sigma(a)$. Provaremos que na verdade todo elemento de $\sigma(a)$ é da forma $\varphi(a)$ para algum $\varphi \in \widehat{A}$:

5.4. Teorema. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então para todo $a \in A$ vale*

$$\sigma(a) = \big\{\varphi(a) : \varphi \in \widehat{A}\big\}.$$

Prova. Seja $\lambda \in \sigma(a)$ e considere o conjunto

$$J_0 = (\lambda - a)A := \big\{(\lambda - a)b : b \in A\big\}.$$

Como estamos supondo que A é comutativa, temos que J_0 é um ideal de A. Sendo que $\lambda - a$ não é inversível é evidente que $1 \notin J_0$ de onde J_0 é distinto de A. Usando o lemma de Zorn, tome um ideal maximal próprio J contendo J_0 (e portanto também $\lambda - a$).

Afirmamos que J é fechado. De fato, se não o fosse é claro que o fecho $\bar{J}$ também seria um ideal e, pela maximalidade de J, teriamos $\bar{J} = A$. Segue se que J é denso e portanto a interseção de J com o conjunto aberto dos elementos inversíveis seria não vazia. Assim J conteria elementos inversíveis e, por ser um ideal, teríamos $J = A$, o que é uma contradição.

Seja $B = A/J$, isto é, o quociente de A por J. Equipando B com a estrutura quociente de álgebra complexa e a norma quociente[3] é fácil ver que B é uma álgebra de Banach comutativa.

Afirmamos que $B = \mathbb{C}1$. De fato, dado $b \in B$, usando (3.9) temos que $\mu - b$ é não inversível para algum $\mu \in \mathbb{C}$. Entretanto, como J é maximal, todo elemento não nulo de B é inversível de onde segue que $b = \mu$.

Tendo provado que $B = \mathbb{C}$ podemos ver a aplicação quociente

$$\pi : A \to A/J = \mathbb{C}$$

como um homomorfismo complexo, ou seja, um elemento de $\widehat{A}$. Recordando que $\lambda - a \in J = \mathrm{Ker}(\pi)$ temos que $\pi(a) = \lambda$ de onde segue a inclusão "$\subseteq$" entre os conjuntos mencionados no enunciado. Como a outra inclusão segue da argumentação acima, o resultado está provado. □

Não deve passar desapercebida a importante consequência do Teorema acima segundo a qual o espectro de uma álgebra de Banach comutativa com unidade é sempre não vazio!

[3] A norma quociente é definida por $\|a + J\| = \inf\limits_{x \in J} \|a + x\|$.

Exercícios do Capítulo 5

A. O espectro de uma álgebra *não comutativa* nem sempre é muito interessante. Por exemplo, se $A = M_n(\mathbb{C})$ então $\widehat{A}$ é o conjunto vazio. Prove isto.

B. Determine o espectro das álgebras dos demais exemplos do capítulo (2). Nos casos em que a álgebra não é competa decida se vale a conclusão do Teorema (5.2).

C. Prove que existe uma única álgebra de Banach comutativa simples (isto é, que não contém ideais bilaterais).

D. Seja A uma álgebra de Banach sem unidade e seja $\widetilde{A}$ a álgebra definida no exemplo (2.F). Prove que o espectro de $\widetilde{A}$ é o compactificado de Alexandrov de $\widehat{A}$ (o compactificado no qual se acrescenta um ponto no infinito).

***E.** Seja S^1 o círculo unitário complexo e seja Z a função complexa definida em S^1 por

$$Z(z) = z, \quad \forall\, z \in S^1.$$

Seja A a menor sub-álgebra fechada de $C(S^1)$ que contém a função constante igual à 1 e o elemento Z. Determine o espectro de A.

****F.** Seja A a álgebra formada por todas as funções complexas definidas em $[0, 1]$ que tem limite lateral em todos os pontos de $[0, 1]$. Determine o espectro de A.

Nesta seção concentrar-nos-emos no estudo de álgebras de Banach comutativas. É fato que várias das definições e resultados que veremos a seguir se aplicam, formalmente falando, para álgebras não comutativas. Entretanto, em não havendo nenhuma aplicação relevante no contexto não comutativo, vamos nos restringir às álgebras comutativas.

Seja portanto A uma álgebra de Banach comutativa, fixa durante este capítulo. Dado $a \in A$ considere a função $\widehat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\widehat{a}(\varphi) = \varphi(a), \quad \forall\, \varphi \in \widehat{A}.$$

A idéia aqui, como em várias outras situações em Matemática, é olhar para a expressão "$\varphi(a)$" e enquanto todos vêm aí a "função φ" calculada na "variável a", nós optamos por ver a "função a" calculada na "variável φ". A definição de $\widehat{a}$ acima tem por objetivo justamente a formalização desta idéia.

Uma vez que consideramos em $\widehat{A}$ justamente a topologia da convergência pontual, é óbvio que $\widehat{a}$ é uma função contínua em $\widehat{A}$ para todo a em A.

Note também que no caso em que $\widehat{A}$ não é compacto temos que $\widehat{a} \in C_0(\widehat{A})$, isto é, $\widehat{a}$ tem limite zero no infinito (veja o exemplo (2.5)). De fato, dado $\varepsilon > 0$ seja $K = \big\{\varphi \in \widehat{A} : |\varphi(a)| \geq \varepsilon\big\}$. É fácil ver que K é compacto e que $|\widehat{a}(\varphi)| < \varepsilon$ para $\varphi \notin K$.

6.1. Definição. A *transformada de Gelfand* de A é a função

$$\kappa : A \to C_0(\widehat{A})$$

dada por $\kappa(a) = \widehat{a}$, para todo $a \in A$.

6.2. Proposição. *Dado $a \in A$ temos*

$$\|\kappa(a)\| = r(a) \leq \|a\|,$$

e portanto a transformada de Gelfand é um homomorfismo contrativo.

Prova. Deixaremos para o leitor a verificação elementar de que κ é de fato um homomorfismo e nos concentraremos na verificação de que $\|\kappa(a)\| = r(a)$. Por definição da norma em $C_0(\widehat{A})$ temos que

$$\|\kappa(a)\| = \sup\big\{|\widehat{a}(\varphi)| : \varphi \in \widehat{A}\big\} =$$

$$= \sup\big\{|\varphi(a)| : \varphi \in \widehat{A}\big\} \overset{(5.4)}{=} \sup\big\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\big\} = r(a). \qquad \square$$

Exercícios do Capítulo 6

A. Seja A uma álgebra de Banach comutativa e seja $a \in A$ um elemento nilpotente (isto é, para o qual existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$). Prove que $\kappa(a) = 0$.

B. Seja A uma álgebra de Banach comutativa e seja $a \in A$ um elemento não nulo para o qual $\|a^2\| = \|a\|^2$. Prove que $\|\kappa(a)\| = \|a\|$, e portanto $\kappa(a) \neq 0$.

C. Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Prove que os seguintes conjuntos são iguais:

i) O radical de Jacobson de A (isto é, o ideal obtido pela interseção de todos os ideais maximais),

ii) O conjunto dos elementos topologicamente nilpotentes,

iii) $\mathrm{Ker}(\kappa)$.

A teoria geral das álgebras de Banach, a partir deste ponto, é extremamente delicada e difícil. Entretanto há uma sub-classe das álgebras de Banach, formada pelas C*-álgebras, para a qual podemos obter resultados muito mais profundos. É a esta classe de álgebras que dedicaremos nossa atenção de agora em diante.

7.1. Definição. Seja A uma álgebra de Banach. Uma *involução* em A é uma função[4]

$$* : A \to A$$

satisfazendo para todo $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

(i) $(a+b)^* = a^* + b^*$,

(ii) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$,

(iii) $(ab)^* = b^* a^*$,

(iv) $(a^*)^* = a$,

(v) $\|a^*\| = \|a\|$.

Uma *álgebra de Banach com involução* é, por definição, uma álgebra de Banach equipada com uma involução. Uma *C*-álgebra* é uma álgebra de Banach com involução para a qual vale

(vi) $\|a^* a\| = \|a\|^2, \quad \forall\, a \in A$.

A álgebra do exemplo (2.4) (com a primeira das duas normas mencionadas) é uma C*-álgebra se equipada com a operação de involução dada pela conjugada complexa, isto é, para uma matriz $a = \{a_{ij}\}$ pomos $a^* = \{\bar{a}_{ji}\}$.

Também a álgebra do exemplo (2.5) pode ser tornada uma C*-álgebra se considerarmos a invoução dada pela conjugação ponto-a-ponto, isto é, dada uma função $f \in C_0(X)$ definimos f^* como sendo a função dada por $f^*(x) = \overline{f(x)}$, para todo $x \in X$.

Um novo e importante exemplo de C*-álgebra é dado a seguir:

7.2. Exemplo. Seja H um espaço de Hilbert complexo e seja $\mathscr{B}(H)$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos

$$T : H \to H.$$

Levando em consideração a estrutura usual de espaço vetorial complexo em $\mathscr{B}(H)$ definimos o produto TS, para $T, S \in \mathscr{B}(H)$, como sendo a composição de operadores $T \circ S$. A norma de um operador $T \in \mathscr{B}(H)$ é definida por

$$\|T\| = \sup \big\{ \|T(\xi)\| : \xi \in H,\ \|\xi\| \leq 1 \big\},$$

[4] A imagem de um elemento a pela função involução será denotada por a^*, e não por $*(a)$.

enquanto que a involução de um operador T é definida como o adjunto usual de T, isto é, T^* é o único operador linear em H que satisfaz

$$\langle T(\xi), \eta \rangle = \langle \xi, T^*(\eta) \rangle , \quad \forall\, \xi, \eta \in H.$$

7.3. Definição. Dada uma C*-álgebra A dizemos que um sub-conjunto $B \subseteq A$ é uma sub-C*-álgebra de A quando B é uma sub-álgebra fechada de A que além disto é invariante pela involução (i.e. $B^* \subseteq B$).

É claro que uma sub-C*-álgebra é, em si, uma C*-álgebra com as operações induzidas pela álgebra ambiente.

Dado um subconjunto qualquer S de uma C*-álgebra A podemos considerar a interseção de todas as sub-C*-álgebras de A que contém S, o que óbviamente resulta numa C*-álgebra que contém S e que é a menor de todas as sub-C*-álgebras de A com esta propriedade. Tal sub-C*-álgebra é chamada a C*-álgebra gerada por S.

Esta é uma importante fonte de exemplos de C*-álgebras que exploramos a seguir.

7.4. Exemplo. Seja H um espaço de Hilbert complexo e seja $\mathscr{K}(H)$ o conjunto de todos os operadores lineares compactos em H. Então $\mathscr{K}(H)$ é uma sub-C*-álgebra de $\mathscr{B}(H)$ e portanto é uma C*-álgebra.

7.5. Exemplo. Seja θ um número irracional e seja H o espaço de Hilbert $L^2(S^1)$. Considere os operadores U e V em H dados por

$$U(\xi)\big|_z = z\xi(z), \quad \text{e} \qquad V(\xi)\big|_z = \xi(e^{2\pi i\theta}z),$$

para todo $\xi \in H$ e $z \in S^1$. Uma importante relação algébrica envolvendo U e V é

$$VU = e^{2\pi i\theta}UV, \tag{7.6}$$

que o leitor pode facilmente verificar. A C*-álgebra gerada por $\{U, V\}$ é chamada a *álgebra de rotação irracional* e é denotada por A_θ.

Sabe-se que A_θ é uma álgebra simples (não contém ideais bilaterais) e também que para $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1/2$, as álgebras A_{θ_1} e A_{θ_2} não são isomorfas [**11**: Theorem 2]. As provas destes dois fatos estão intimamente ligadas ao grande avanço da teoria das C*-álgebras dos últimos vinte e cinco anos.

7.7. Exemplo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $I_n = \{0,1\}^n$ e seja $I_\infty = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Seja H um espaço de Hilbert com uma base $\{e_\xi\}_{\xi \in I_\infty}$ indexada por I_∞ (e portanto não separável). Dado $n \in \mathbb{N}$ considere para cada $v = (v_0, \ldots, v_{n-1}) \in I_n$ o operador $S_v : H \to H$ dado por $S_v(e_\xi) = e_{v\xi}$, onde entendemos a expressão $v\xi$ como concatenação, isto é $v\xi = (v_0, \ldots, v_{n-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots)$.

Observe que cada S_v é uma isometria de H sobre um subespaço H_v de H (a saber o subespaço gerado pelos e_ξ para todos os ξ que "começam" por v) e que para $v \neq w \in I_n$ temos $H_v \perp H_w$.

Seja A_n o sub-espaço vetorial de $\mathscr{B}(H)$ gerado pelo conjunto de operadores

$$\big\{e_{vw} := S_v S_w^* : v, w \in I_n\big\}.$$

É fácil verificar que

$$e_{vw} e_{yz} = \delta_{wy} e_{vz}, \quad \text{e} \quad e_{vw}^* = e_{wv},$$

de onde segue facilmente que A_n é uma sub-C*-álgebra de $\mathscr{B}(H)$ isomorfa à álgebra de matrizes de tamanho $2^n \times 2^n$ sobre $\mathbb{C}$. Não é difícil provar que

$$e_{vw} = e_{v^0 w^0} + e_{v^1 w^1},$$

onde $v^0, v^1 \in I_{n+1}$ são dados por $v^0 = (v_0, \ldots, v_{n-1}, 0)$ e $v^1 = (v_0, \ldots, v_{n-1}, 1)$ e similarmente para w^0 e w^1. Desta forma vemos que $A_n \subseteq A_{n+1}$. Definimos então A como sendo o fêcho da reunião crescente $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

A é uma AF-álgebra (aproximadamente finita), no sentido em que esta contém uma álgebra densa que é a reunião de uma família crescente de sub-álgebras de dimensão finita. Sabe-se também que A é uma álgebra simples.

O estudo desta álgebra tem íntima relação com as famosas *canonical anticommutation relations* no estudo de *férmions* em Física quântica. Além disto importantes modelos de termodinâmica quântica, como por exemplo o famoso modêlo de Ising para ferromagnetismo, pode ser estudado através da álgebra do presente exemplo.

A seguir discutiremos algumas propriedades elementares das C*-álgebras.

7.8. Proposição. *Se A é uma C*-álgebra com unidade então $1 = 1^*$ e $\|1\| = 1$ (a menos do caso trivial em que $A = \{0\}$).*

Prova. Temos $1^* = 1^*1 = (1^*1)^* = (1^*)^* = 1$. Também $\|1\|^2 = \|1^*1\| = \|1\|$, donde $\|1\| = 1$ (ou $\|1\| = 0$). □

Assim como um número complexo tem sua parte real e imaginária temos:

7.9. Proposição. *Seja A uma álgebra de Banach com involução. Dado $a \in A$ existem elementos $x, y \in A$ tais que $x^* = x$, $y^* = y$ e $a = x + iy$.*

Prova. Sejam

$$x = \frac{a + a^*}{2}, \quad \text{e} \quad y = \frac{a - a^*}{2i}.$$

A verificação das condições do enunciado é elementar. □

Estudaremos agora uma importante propriedade relativa ao espectro de elementos de uma C*-álgebra.

7.10. Proposição. *Seja A uma C*-álgebra com unidade e seja $a \in A$ um elemento auto-adjunto, isto é, tal que $a^* = a$. Então $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.*

Prova. Seja $\lambda \in \sigma(a)$ e escreva $\lambda = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$. O nosso objetivo será provar que $y = 0$. Para cada inteiro n seja $b_n = a - x + iny$. Considerando a função racional f dada por $f(z) = z - x + iny$ concluímos de (3.10) que $f(\lambda) \in \sigma(f(a))$, ou seja, $i(n+1)y \in \sigma(b_n)$. Segue portanto de (3.6) que $|i(n+1)y| \leq \|b_n\|$, de onde

$$(n^2 + 2n + 1)y^2 = |i(n+1)y|^2 \leq \|b_n\|^2 = \|b_n^* b_n\| = \|(a - x - iny)(a - x + iny)\| =$$

$$= \|(a - x)^2 + n^2 y^2\| \leq \|a - x\|^2 + n^2 y^2,$$

o que implica que

$$(2n + 1)y^2 \leq \|a - x\|^2.$$

Como n é arbitrário concluimos que $y = 0$, ou ainda que $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Uma outra propriedade importante das C*-álgebras é exposta na seguinte:

7.11. Proposição. *Seja A uma C*-álgebra com unidade e $a \in A$ um elemento auto-adjunto. Então*

$$r(a) = \|a\|.$$

Prova. Note que $\|a\|^2 = \|a^* a\| = \|a^2\|$ de onde, por indução finita, temos que $\|a\|^{2^n} = \|a^{2^n}\|$. Segue-se que

$$r(a) \overset{(4.3)}{=} \lim_{n \to \infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|.$$ □

Exercícios do Capítulo 7

A. Prove que a definição (7.1) não se altera se omitirmos o axioma (v) e substituirmos o axioma (vi) pela forma enfraquecida $\|a^* a\| \geq \|a\|^2$.

B. Seja A uma C*-álgebra sem unidade. Prove que a álgebra do exercício (2.F) torna-se uma C*-álgebra com unidade se definirmos a involução e a norma a seguir:

$$(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda}), \quad \text{e} \quad \|(a, \lambda)\| = \sup\Big\{\|ab + \lambda b\| : b \in A,\ \|b\| \leq 1\Big\}.$$

Prove também que esta norma é equivalente à norma introduzida no exercício (2.F).

C. Prove a relação (7.6).

D. Sendo que a álgebra A_n citada no exemplo (7.7) é isomorfa à álgebra de matrizes $2^n \times 2^n$, e sendo que $A_n \subseteq A_{n+1}$, explique de que forma a álgebra $M_{2^n}(\mathbb{C})$ se encontra contida na álgebra $M_{2^{n+1}}(\mathbb{C})$.

***E.** Este exercício tem o objetivo de mostrar a importância do axioma (7.1.vi), mostrando que existe uma álgebra de Banach com involução, para a qual (7.10) falha. Seja A a álgebra do exercício (5.E). Para $f \in A$ defina

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}, \quad \forall\, z \in S^1.$$

Prove que $(A, *)$ é uma álgebra de Banach com involução. Prove também que o elemento Z é auto-adjunto e que $\sigma(Z)$ é o disco unitário complexo (que portanto não está contido em $\mathbb{R}$).

O grande objetivo deste capítulo é a prova do Teorema de Gelfand segundo o qual toda C*-álgebra comutativa A com unidade é isomorfa à $C(\widehat{A})$ através da transformada de Gelfand vista no capítulo (6). Para isto vamos supor ao longo do presente capítulo que A é uma C*-álgebra comutativa com unidade fixa.

O Teorema de Gelfand se aplica igualmente para C*-álgebras sem unidade (neste caso devemos substituir $C(\widehat{A})$ por $C_0(\widehat{A})$). Nós vamos nos restringir aqui ao caso com unidade, deixando a generalização para o caso sem unidade como exercício (veja abaixo).

Seja A uma C*-álgebra comutativa com unidade, fixa durante todo este capítulo. Começaremos provando que homomorfismos complexos definidos em A necessariamente preservam a involução:

8.1. Proposição. *Dado $\varphi \in \widehat{A}$ temos que*

$$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}, \quad \forall\, a \in A.$$

Prova. Suponha inicialmente que a é auto-adjunto. Então, como $\varphi(a) \in \sigma(a)$ por (5.4), e como $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ por (7.10), temos que $\varphi(a) \in \mathbb{R}$, de onde

$$\varphi(a^*) = \varphi(a) = \overline{\varphi(a)}.$$

No caso geral escreva $a = x + iy$ como em (7.9) e portanto temos

$$\varphi(a^*) = \varphi(x - iy) = \varphi(x) - i\varphi(y) = \overline{\varphi(x) + i\varphi(y)} = \overline{\varphi(a)}. \qquad \square$$

Note que o resultado acima pode ser interpretado como dizendo que a transformada de Gelfand é um *-homomorfismo, isto é, um homomorfismo que satisfaz $\kappa(a^*) = \overline{\kappa(a)}$ para todo $a \in A$.

Podemos agora provar o Teorema de Gelfand, um dos resultados mais celebrados na teoria das C*-álgebras:

8.2. Teorema. *Seja A uma C*-álgebra comutativa com unidade. A transformada de Gelfand $\kappa : A \to C(\widehat{A})$ é um *-isomorfismo isométrico de A sobre $C(\widehat{A})$.*

Prova. Seja $a \in A$. Como a^*a é auto-adjunto temos que

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \overset{(7.11)}{=} r(a^*a) \overset{(6.2)}{=} \|\kappa(a^*a)\| = \|\overline{\kappa(a)}\kappa(a)\| = \|\kappa(a)\|^2,$$

provando assim que κ é um homomorfismo isométrico. Basta portanto verificarmos que κ é sobrejetor. Para isto lançaremos mão do Teorema de Stone-Weierstrass e portanto precisamos apenas provar que $\kappa(A)$ separa pontos de $\widehat{A}$.

Sejam portanto $\varphi, \psi \in \widehat{A}$ com $\varphi \neq \psi$. Devemos encontrar $a \in A$ tal que $\kappa(a)(\varphi) \neq \kappa(a)(\psi)$, ou seja, $\varphi(a) \neq \psi(a)$, mas dado que $\varphi \neq \psi$, tal a certamente existe! $\square$

Para finalizar este capítulo demonstraremos um importante resultado sobre permanência espectral:

8.3. Teorema. *Seja B uma C*-álgebra com unidade e seja $A \subseteq B$ uma sub-C*-álgebra contendo a unidade de B.*

(i) *Dado $a \in A$ inversível (como elemento de B) tem-se que $a^{-1} \in A$.*

(ii) *O espectro de a relativo à B, denotado $\sigma_B(a)$, coincide com $\sigma_A(a)$, o espectro de a relativo à A.*

Prova. Suponha inicialmente que a é auto-adjunto. Podemos então supor, sem perda de generalidade, que A é a sub-C*-álgebra de B gerada por $\{1, a\}$ e portanto que A é comutativa. Pelo Teorema de Gelfand A é isometricamente isomorfa à $C(\widehat{A})$.

Supondo-se que a não é inversível em A então $\kappa(a)$ é uma função que admite zeros. Portanto existe uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $\lim_n \|aa_n\| = 0$ e $\|a_n\| = 1$ para todo n. Teríamos então que

$$1 = \|a_n\| = \|a^{-1}aa_n\| \leq \|a^{-1}\| \, \|aa_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

o que é um absurdo.

No caso geral note que a^*a e aa^* são inversíveis em B de onde $(a^*a)^{-1}$ e $(aa^*)^{-1} \in A$ pelo que já foi provado. Segue-se que a é inversível à esquerda e à direita como elemento de A, donde inversível em A. Como o inverso é necessariamente único temos que o inverso de a relativo à B coincide com o inverso relativo à A e portanto pertence à A. Isto conclui a demonstração da parte (i).

Quanto à (ii) seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Então pela parte (i) temos que $\lambda - a$ é inversível em B se e somente se $\lambda - a$ é inversível em A. Segue imediatamente que $\sigma_B(a) = \sigma_A(a)$. □

Exercícios do Capítulo 8

A. Seja A uma C*-álgebra comutativa sem unidade e seja $\widetilde{A}$ a a C*-álgebra introduzida no exercício (7.B). Seja

$$\kappa : \widetilde{A} \to C(\widehat{\widetilde{A}})$$

a transformada de Gelfand. Prove que $\kappa(A) = \left\{ f \in C(\widehat{\widetilde{A}}) : f(\infty) = 0 \right\}$ onde ∞ é o "ponto no infinito" conforme o exercício (5.D). Deduza que a transformada de Gelfand de A é um *-isomorfismo sobre $C_0(\widehat{A})$.

B. Seja A uma C*-álgebra e seja $a \in A$ um elemento normal. Prove que se existe uma semi-reta no plano complexo contendo a origem e que não intercepta $\sigma(a)$ então para cada inteiro $n > 1$ existe $b \in A$ tal que $b^n = a$.

POSITIVIDADE 9

O conceito de positividade é um conceito fundamental em análise e, como não poderia deixar de ser, representa um papel importantíssimo na teoria das C*-álgebras. Este capítulo é dedicado a introduzir as noções básicas de positividade no nosso contexto. Seja portanto A uma C*-álgebra com unidade fixa ao longo do presente capítulo.

9.1. Definição. Um elemento $a \in A$ é dito *positivo* se a é auto-adjunto e $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ (por $\mathbb{R}_+$ entendemos o intervalo $[0, +\infty)$).

Iniciamos com uma lista de resultados básicos para elementos positivos de uma C*-álgebra:

9.2. Proposição.

(i) *Todo elemento auto-adjunto $a \in A$ pode ser escrito como a diferença de elementos positivos a_+ e a_- tais que $a_+a_- = 0$.*

(ii) *Se a e $-a$ são ambos positivos então $a = 0$.*

(iii) *Seja $a \in A$ um elemento auto-adjunto e seja μ uma constante com $\mu \geq \|a\|$. Então a é positivo se e somente se $\|\mu - a\| \leq \mu$.*

(iv) *Se a e b são positivos então $a + b$ também é positivo.*

(v) *Se a é um elemento auto-adjunto então $a \leq \|a\|$ no sentido em que $\|a\| - a$ é positivo.*

Prova. Dado $a \in A$ auto-adjunto, a sub-C*-álgebra B de A gerada por $\{1, a\}$ é comutativa e portanto, pelo Teorema de Gelfand, isomorfa à $C(\widehat{B})$. Identificando B e $C(\widehat{B})$ via a transformada de Gelfand podemos pensar em a como uma função real contínua em $\widehat{B}$ e, reciprocamente, toda função contínua em $\widehat{B}$ pode ser interpretada como um elemento de B. Seja portanto

$$a_+ = \max\{a, 0\}, \quad \text{e} \quad a_- = \max\{-a, 0\}.$$

É claro que $a = a_+ - a_-$, que $a_+a_- = 0$, e que a_+ e a_- são funções reais positivas e portanto elementos positivos de B. Por (8.3.ii) vemos que a_+ e a_- são positivos também como elementos de A.

Suponha agora que a e $-a$ são positivos. Então temos que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-$ de onde $\sigma(a) = \{0\}$ e portanto por (7.11) concluimos que $\|a\| = r(a) = 0$.

Para provarmos (iii) note que por (3.6) e (7.10) temos que

$$\sigma(a) \subseteq \big[-\|a\|, \|a\|\big] \subseteq [-\mu, \mu].$$

Além disto

$$\|\mu - a\| \overset{(7.11)}{=} r(\mu - a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\mu - \lambda| = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} \mu - \lambda.$$

É óbvio portanto que $\|\mu - a\| \leq \mu$ se e somente se $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Para provarmos (iv) sejam a e b elementos positivos. Por (iii) temos que $\big\|\|a\| - a\big\| \leq \|a\|$ e similarmente para b. Seja $\mu = \|a\| + \|b\|$. Então é claro que $\mu \geq \|a+b\|$ e que

$$\|\mu - (a+b)\| = \big\|(\|a\| - a) + (\|b\| - b)\big\| \leq \big\|\|a\| - a\big\| + \big\|\|b\| - b\big\| \leq \|a\| + \|b\| = \mu,$$

de onde $a+b$ é positivo por (iii).

Finalmente, seja $a \in A$ um elemento auto-adjunto. Então por (3.6) temos que que $\sigma(a) \subseteq \big[-\|a\|, \|a\|\big]$ e consequentemente $\sigma(\|a\| - a) \subseteq \big[0, 2\|a\|\big]$ por (3.10). Assim $\|a\| - a$ é positivo. $\square$

A seguir veremos um resultado técnico importante que nos auxiliará na obtenção de caracterizações mais eficazes de positividade:

9.3. Lema. *Suponha que $a \in A$ e que $-a^*a$ é positivo. Então $a = 0$.*

Prova. Escreva $a = x + iy$ como em (7.9). Como x é auto-adjunto temos por (7.10) que $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$ e portanto, por (3.10), temos que $\sigma(x^2) = \sigma(x)^2 \subseteq \mathbb{R}_+$. Segue-se que x^2, e similarmente y^2, são elementos positivos. Note que

$$a^*a + aa^* = (x - iy)(x + iy) + (x + iy)(x - iy) = 2x^2 + 2y^2.$$

Portanto

$$a^*a = 2x^2 + 2y^2 - aa^*.$$

Como $\sigma(-aa^*) \setminus \{0\} = \sigma(-a^*a) \setminus \{0\}$ por (3.2) temos que $-aa^*$ é positivo. Por (9.2.iv) temos então que a^*a é também positivo e segue de (9.2.ii) que $a^*a = 0$, donde $a = 0$. $\square$

A seguir damos duas caracterizações alternativas para elementos positivos:

9.4. Teorema. *Seja A uma C*-álgebra com unidade. Dado $a \in A$ são equivalentes:*

(i) *a é positivo.*

(ii) *Existe um elemento auto-adjunto $b \in A$ tal que $b^2 = a$.*

(iii) *Existe $b \in A$ tal que $b^*b = a$.*

Prova. Supondo (i) seja B a sub-C*-álgebra de A gerada por $\{1, a\}$. Então pelo Teorema de Gelfand temos que B é isometricamente isomorfa à $C(\widehat{B})$. Além disto, por (5.4), a imagem da função $\kappa(a)$ coincide com $\sigma_B(a)$, que por sua vez é igual à $\sigma_A(a)$ por (8.3). Concluimos portanto que $\kappa(a)$ é uma função positiva em $\widehat{B}$. Seja $g = \sqrt{\kappa(a)}$ e $b = \kappa^{-1}(g)$. É claro agora que b satisfaz às condições de (ii).

Sendo evidente que (ii) $\Rightarrow$ (iii) resta-nos provar que (iii) $\Rightarrow$ (i). Para isto assuma que $a = b^*b$ e sejam a_+ e a_- como em (9.2). Pondo $c = ba_-$ temos

$$-c^*c = -a_-(a_+ - a_-)a_- = a_-^3.$$

Como a_- é positivo é fácil ver que $\sigma(a^3) = \sigma(a)^3 \subseteq \mathbb{R}_+$ donde a^3 é também positivo. Da equação acima temos então que $-c^*c$ é positivo donde $c = 0$ por (9.3). Segue-se que $a_-^3 = 0$ donde $a_- = 0$ e portanto $a = a_+$, ou seja, a é positivo. $\square$

Uma consequência simples do resultado acima é:

9.5. Corolario. *Se a é um elemento positivo então b^*ab também o é para todo $b \in A$.*

Prova. De fato, sabendo-se que $a = c^*c$ para algum $c \in A$ temos que $b^*ab = b^*c^*cb = (cb)^*(cb)$. □

No histórico artigo [**6**] onde Gelfand e Neumark introduziram os axiomas de C*-álgebras, figurava um axioma que não foi mencionado na definição (7.1), a saber que $a^*a + 1$ é inversível para todo $a \in A$.

Note que decorre do resultado acima que a^*a é positivo, e que portanto $\sigma(a^*a) \subseteq \mathbb{R}_+$, donde $-1 \notin \sigma(a^*a)$. Portanto vemos que o "axioma" extra de Gelfand e Neumark pode ser dispensado, por ser decorrente dos demais.

Exercícios do Capítulo 9

A. Prove que o conjunto A_+ formado por todos os elementos positivos de A é fechado. Sugestão: (9.2.iii).

B. Prove que a decomposição em (9.2.i) é única.

C. Prove que o sub-espaço vetorial de A gerado pelos elementos positivos coincide com A.

D. Sejam a e b elementos positivos. Prove que ab é positivo se e somente se $ab = ba$.

E. Prove que a relação em A definida por $a \leq b$ se e somente se $b - a$ é positivo é uma relação de ordem.

F. Prove que para todo elemento auto-adjunto $a \in A$ tem-se que $a \leq \|a\|$.

G. Na prova de (i)⇒(ii) em (9.4) o elemento b obtido é na verdade um elemento positivo. Prove que sob esta hipótese extra b é único. Neste caso diz-se que b é a raiz quadrada de a e denota-se $b = \sqrt{a}$.

H. Seja A uma C*-álgebra sem unidade e seja $a \in A$ um elemento que é positivo como elemento de $\widetilde{A}$ (veja o exercício (7.B)). Prove que existe um elemento auto-adjunto $b \in A$ tal que $b^2 = a$.

Históricamente o estudo de álgebras de operadores, isto é, sub-C*-álgebras de $\mathscr{B}(H)$, onde H é um espaço de Hilbert, precede em vários anos a introdução dos axiomas de C*-álgebras por Gelfand e Neumark em [**6**], cujo objetivo era, entre outros, permitir o estudo abstrato destas importantes álgebras.

Tal estudo é o que, em parte, fizemos acima. Entretanto é hora de voltar às origens e restabelecer a ligação entre o conceito abstrato de C*-álgebras por um lado, e as álgebras de operadores, por outro.

O ponto de ligação entre estes dois mundos é feito através do seguinte conceito:

10.1. Definição. Seja A uma álgebra de Banach com involução e H um espaço de Hilbert. Uma *representação* de A em H é um *-homomorfismo

$$\pi : A \to \mathscr{B}(H),$$

isto é, um homomorfismo que satisfaz $\pi(a^*) = \pi(a)^*$ para todo $a \in A$.

O nosso maior objetivo nestas notas será o de provar que para toda C*-álgebra existe uma representação isométrica, e portanto que toda C*-álgebra é idêntica à uma sub-C*-álgebra de $\mathscr{B}(H)$.

10.2. Exemplo. Seja $A = C_0(X)$ a álgebra do exemplo (2.5), onde X é um espaço topológico localmente compacto. Seja ainda μ uma medida boreliana regular em X e considere o espaço de Hilbert $H = L_2(X, \mu)$. Para cada $f \in A$ defina o operador $\pi(f)$ em H pela expressão

$$\pi(f)\xi\big|_x = f(x)\xi(x), \quad \forall\, \xi \in H, \quad \forall\, x \in X.$$

É fácil mostrar que $\pi(f)$ é de fato um operador linear contínuo em H e que a função $\pi : A \to \mathscr{B}(H)$ é uma representação de A em H. Se o suporte da medida μ coincidir com X teremos que π é isométrica e portanto $C_0(X)$ é isometricamente isomorfo a uma álgebra de operadores em $L_2(X, \mu)$.

Seja A uma C*-álgebra arbitrária e seja π uma representação de A num espaço de Hilbert H. Tomando se um vetor $\xi \in H$ defina a função $f : A \to \mathbb{C}$ por

$$f(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle\,, \quad \forall\, a \in A. \tag{10.3}$$

É elementar verificarmos que f é um funcional linear em A e que além disto f é positivo no sentido da seguinte:

10.4. Definição. Um funcional linear $f : A \to \mathbb{C}$ é chamado um *funcional positivo* se para todo $a \in A$ tenhamos que $f(a^*a)$ é um numero real maior ou igual a zero. Se além disto $f(1) = 1$ então f é chamado um *estado*[5] de A

[5] A terminologia "estado" provém da Mecânica Quântica.

Note que por (9.4) um funcional positivo manda elementos positivos em números reais positivos.

Como já mencionado, a expressão (10.3) fornece portanto um funcional positivo para cada vetor $\xi \in H$, que é obviamente um estado caso $\pi(1) = 1$ e $\|\xi\| = 1$. Por esta razão o estudo dos funcionais positivos é extremamente relevante na teoria de representações de C*-álgebras.

Assim como em (5.2), temos o seguinte resultado de continuidade automática:

10.5. Proposição. *Seja A uma C*-álgebra com unidade e seja f um funcional positivo em A. Dados $a, b \in A$ defina*

$$\langle a, b \rangle = f(a^* b).$$

Então

(i) *Para todo $a, b \in A$ temos $|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$.*

(ii) *f é contínuo e $\|f\| = f(1)$.*

Prova. É elementar verificarmos que a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida acima satisfaz todas as propriedades de um produto interno, exceto possivelmente pelo axioma de "não degenerecência", isto é o axioma segundo o qual $\langle a, a \rangle \neq 0$ para $a \neq 0$. Note também que a desigualdade em (i) é precisamente a desigualdade de Cauchy-Schwartz. Como a prova usual desta última não requer a propriedade de não degenerecência, (i) segue como no caso clássico.

Tomando $a = 1$ em (i) concluimos que para todo $b \in A$

$$|f(b)|^2 \leq f(1) f(b^* b) \overset{(9.2.v)}{\leq} f(1) \; \|b^* b\| \; f(1) = f(1)^2 \|b\|^2,$$

donde f é contínuo e $\|f\| = f(1)$. □

Nem sempre é simples verificarmos que um funcional linear é positivo. O seguinte critério, essencialmente uma recíproca do resultado acima, é às vezes de grande utilidade:

10.6. Proposição. *Seja f um funcional linear contínuo em A. Se $f(1) = \|f\|$ então f é positivo.*

Prova. Normalizando podemos supor que $f(1) = \|f\| = 1$. Seja a um elemento positivo de A. Escreva $f(a) = x + iy$, onde x e y são números reais. Queremos portanto provar que $y = 0$ e $x \geq 0$.

Seja μ um número real com $\mu \geq \|a\|$ e note que por (9.2.iii) temos $\|\mu - a\| \leq \mu$. Por hipótese segue que

$$\mu - x \leq |\mu - x - iy| = |f(\mu - a)| \leq \|\mu - a\| \leq \mu,$$

donde $x > 0$. Seja agora $b_n = a - x + iny$ para cada inteiro positivo n. Notando que $f(b_n) = i(n+1)y$ temos que

$$(n^2 + 2n + 1) y^2 = |f(b_n)|^2 \leq \|b_n\|^2 = \|b_n^* b_n\| =$$

$$= \|(a - x)^2 + n^2 y^2\| \leq \|(a - x)^2\| + n^2 y^2.$$

Segue-se que $(2n + 1) y^2 \leq \|(a - x)^2\|$ para todo n mas isto só é possível se $y = 0$. □

O resultado a seguir mostra que existem estados em abundância.

10.7. Proposição. *Seja A uma C^*-álgebra com unidade e seja $a \in A$ um elemento auto-adjunto. Então existe um estado f em A tal que $|f(a)| = \|a\|$.*

Prova. Seja B a sub-C*-álgebra comutativa de A gerada por $\{1, a\}$. Como $r(a) = \|a\|$, por (7.11), existe $\lambda \in \sigma(a)$ com $|\lambda| = \|a\|$. Por (5.4) existe então $\varphi \in \widehat{B}$ tal que $|\varphi(a)| = \|a\|$.

Note que φ é um funcional contínuo em B com $\|\varphi\| = 1 = \varphi(1)$ por (5.2). Usando o Teorema de Hahn-Banach seja f um funcional linear contínuo em A que estende φ com $\|f\| = \|\varphi\|$.

É óbvio então que $\|f\| = 1 = f(1)$ e portanto f é um estado por (10.6). Como f estende φ temos também que $|f(a)| = \|a\|$. $\square$

Exercícios do Capítulo 10

A. Prove que um elemento $a \in A$ é:
- i) auto-adjunto se e somente se $f(a) \in \mathbb{R}$ para todo estado f,
- ii) positivo se e somente se $f(a) \geq 0$ para todo estado f.

B. Seja f um funcional linear em $M_n(\mathbb{C})$. Prove que f é positivo se e somente se existe uma matriz positiva h tal que $f(a) = \mathrm{tr}(ah)$, para todo $a \in M_n(\mathbb{C})$.

C. Seja $a \in A$ um auto-adjunto. Prove que o conjunto dos números reais da forma $f(a)$, onde f é um estado em A, coincide com a envoltória convexa de $\sigma(a)$.

***D.** Generalize o resultado acima supondo que a é normal, isto é, que $aa^* = a^*a$.

E. Seja μ uma medida de Borel regular complexa num espaço compacto X tal que $\mu(X) = \|\mu\|$ (onde $\|\mu\|$ é a variação total de μ). Prove que μ é uma medida positiva.

Tendo obtido os resultados técnicos sobre funcionais positivos em C*-álgebras dos quais necessitaremos a seguir, concentrar-nos-emos agora no estudo propriamente dito de representações.

11.1. Proposição. *Seja A uma álgebra de Banach com involução e $\pi : A \to \mathscr{B}(H)$ uma representação. Então $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$, em particular π é contínua.*

Prova. Por (2.F) podemos supor que A tem unidade e que $\pi(1) = 1$. Como π necessariamente manda elementos inversíveis em elementos inversíveis temos que $\sigma(\pi(a)) \subseteq \sigma(a)$ para todo $a \in A$, donde $r(\pi(a)) \leq r(a)$. Portanto

$$\|\pi(a)\|^2 = \|\pi(a^*a)\| \overset{(7.11)}{=} r\big(\pi(a^*a)\big) \leq r(a^*a) \leq \|a^*a\| \leq \|a^*\|\,\|a\| = \|a\|^2. \qquad \square$$

Note que o resultado acima, assim como sua demonstração, se generaliza facilmente para qualquer *-homomorfismo de uma álgebra de Banach com involução para uma C*-álgebra.

11.2. Definição. Seja π uma representação da C*-álgebra A num espaço de Hilbert H. Dizemos que um subespaço $K \subseteq H$ é invariante por π se para todo $a \in A$ e tivermos que $\pi(a)K \subseteq K$.

Dado um subespaço fechado e invariante K podemos considerar a restrição $\rho(a)$ de cada operador $\pi(a)$ para K, obtendo assim uma nova representação

$$\rho : A \to \mathscr{B}(K).$$

Por abuso de linguagem diremos que ρ é a restrição[6] de π para K.

Dado um vetor $\xi \in H$ seja K o fêcho do conjunto

$$\pi(A)\xi = \big\{\pi(a)\xi : a \in A\big\}.$$

É claro que K é então um subespaço fechado e invariante, ao qual chamaremos de *espaço cíclico* gerado por ξ.

11.3. Definição. Uma representação π da C*-álgebra A em H é dita uma *representação cíclica* se existe um vetor $\xi \in H$ tal que $\pi(A)\xi$ é denso em H (e portanto H coincide com o espaço cíclico gerado por ξ). Um vetor ξ como acima é chamado um *vetor cíclico* para π.

[6] Note que na verdade K não é um subconjunto do domínio de π, e sim de cada operador $\pi(a)$.

Note que o funcional f em (10.3) não se altera se substituirmos π pela sua restrição ao espaço cíclico gerado por ξ.

11.4. Teorema. *Seja A uma C^*-álgebra com unidade e seja f um funcional positivo em A. Então existe uma representação cíclica π de A num espaço de Hilbert H possuindo um vetor cíclico ξ tal que*

$$f(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle, \quad \forall\, a \in A.$$

Se f é um estado então $\|\xi\| = 1$.

Prova. Considere a função sesqui-linear $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em A definida como em (10.5) e seja $N = \big\{a \in A : \langle a, a\rangle = 0\big\}$. N é um subespaço vetorial de A em consequência da "desigualdade triangular"

$$\langle a+b, a+b\rangle^{1/2} \leq \langle a, a\rangle^{1/2} + \langle b, b\rangle^{1/2}$$

que, como de costume, segue da desigualdade de Cauchy-Schwartz. É fácil ver que a expressão

$$\langle a+N, b+N\rangle := \langle a, b\rangle$$

produz uma forma sesqui-linear bem definida em A/N que é positiva e não degenerada, isto é, um produto interno. Consequentemente A/N torna-se um espaço pré-hilbertiano. Dado $a \in A$ considere a transformação

$$\pi_0(a) : b + N \in A/N \mapsto ab + N \in A/N.$$

Afirmamos que π_0 está bem definida e é contínua. De fato, dado $b \in A$ temos que

$$\|ab+N\|^2 = \langle ab, ab\rangle = f(b^*a^*ab).$$

Sabemos por (9.2.v) que $\|a^*a\| - a^*a$ é positivo e portanto o mesmo se aplica para $b^*(\|a^*a\| - a^*a)b$, por (9.5). Consequentemente

$$f(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\| f(b^*b) = \|a\|^2 \langle b+N, b+N\rangle.$$

Assim vemos que

$$\|ab+N\| \leq \|a\|\,\|b+N\|, \tag{$\dagger$}$$

o que prova que π_0 é bem definida pois se $b_1 + N = b_2 + N$ então

$$\|ab_1 - ab_2 + N\| \leq \|a\|\,\|b_1 - b_2 + N\| = 0,$$

e portanto $ab_1 + N = ab_2 + N$. Além disto é claro que ($\dagger$) implica que π_0 é contínua.

Seja H o completamento de A/N e para cada $a \in A$ seja $\pi(a)$ a única extensão contínua de $\pi_0(a)$ para um operador limitado em H. O leitor poderá agora verificar sem dificuldade que a correspondência

$$\pi : a \in A \mapsto \pi(a) \in \mathscr{B}(H)$$

é uma representação cíclica de A em H com vetor cíclico $\xi = 1 + N$. É evidente também que para todo $a \in A$ temos

$$\langle \pi(a)\xi, \xi\rangle = \langle a+N, 1+N\rangle = f(a). \qquad \square$$

A importância do resultado acima reside no fato de que representações são produzidas a partir de funcionais positivos. Por outro lado (10.7) nos garante a existência de muitos funcionais positivos e portanto representações devem existir em abundância. A forma mais eficaz de precisar esta idéia é talvez:

11.5. Teorema. *Seja A uma C*-álgebra. Então existe uma representação isométrica de A em um espaço de Hilbert.*

Prova. Sem perda de generalidade podemos supor que A tem unidade. Para cada $a \in A$ seja f um estado de A tal que $|f(a^*a)| = \|a\|^2$ por (10.7). Seja π_a a representação cíclica de A, com vetor cíclico unitário ξ, dada em termos de f por (11.4). Temos

$$\|a\|^2 = f(a^*a) = \langle \pi_a(a^*a)\xi, \xi\rangle = \langle \pi_a(a)\xi, \pi_a(a)\xi\rangle =$$

$$= \|\pi_a(a)\xi\|^2 \leq \|\pi_a(a)\|^2\|\xi\|^2 = \|\pi_a(a)\|^2 \overset{(11.1)}{\leq} \|a\|^2.$$

Temos então que $\|\pi_a(a)\| = \|a\|$. Seja H_a o espaço de π_a e defina

$$H = \bigoplus_{a \in A} H_a.$$

Seja π a representação de A em H dada por

$$\pi(b) = \bigoplus_{a \in A} \pi_a(b), \quad \forall\, b \in A.$$

É claro portanto que π é uma representação isométrica. □

Exercícios do Capítulo 11

A. Suponha que K é um espaço invariante por uma representação π. Prove que $K^\perp$ é também invariante.

B. Seja f o estado em $C([0,1])$ dado por $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$, para todo $x \in C([0,1])$. Descreva a representação construida em (11.4) para f.

C. Descreva a representação construida em (11.4) para o funcional traço em $M_n(\mathbb{C})$.

D. Prove que se A é separável então o espaço de Hilbert construido em (11.4) é também separável.

E. Prove que se A é separável então existe uma representação isométrica de A em um espaço de Hilbert separável.

F. Seja A uma C*-álgebra com unidade. Suponha que para cada $i = 1, 2$ é dada uma representação cíclica π_i de A num espaço H_i com vetor cíclico ξ_i tal que $\langle \pi_1(a)\xi_1, \xi_1\rangle = \langle \pi_2(a)\xi_2, \xi_2\rangle$, $\forall a \in A$. Prove que existe um operador unitário $U : H_1 \to H_2$ tal que $U(\xi_1) = \xi_2$ e $\pi_2(a) = U\pi_1(a)U^{-1}$ para todo $a \in A$. Em resumo, a representação construida em (11.4) é única.

[1] O. Bratteli and D. W. Robinson, “Operator algebras and quantum statistical mechanics. 1”, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, 1987.

[2] K. R. Davidson, “C*-algebras by example”, Fields Institute Monographs, Amer. Math. Soc., 1996.

[3] J. Dixmier, “C*-Algebras”, North Holland, 1982.

[4] J. M. G. Fell and R. S. Doran, “Representations of *-algebras, locally compact groups, and Banach *-algebraic bundles”, Pure and Applied Mathematics vol. 125 and 126, Academic Press, 1988.

[5] P. A. Fillmore, “A user's guide to operator algebras”, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, Wiley Interscience, 1996.

[6] I. Gelfand and M. Neumark, “On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space”, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, **12(54)** (1943), 197–213.

[7] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, “Fundamentals of the theory of operator algebras”, Pure and Applied Mathematics vol. 100-II, Academic Press, 1986.

[8] G. J. Murphy, “C*-algebras and operator theory”, Academic Press, 1990.

[9] J. von Neumann, “Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren”, *Math. Ann.*, **102** (1929), 370–427.

[10] G. K. Pedersen, “C*-algebras and their automorphism groups”, Acad. Press, 1979.

[11] M. A. Rieffel, “C^*-algebras associated with irrational rotations”, *Pacific J. Math.*, **93** (1981), 415–429.

[12] W. Rudin, “Real and Complex Analysis”, McGraw-Hill series in higher mathematics, McGraw-Hill, 1974.

[13] V. S. Sunder, “Functional analysis – Spectral Theory”, Birkhäuser Verlag, 1998.

[14] M. Takesaki, “Theory of operator algebras I”, Springer-Verlag, 1979.