DUALIDADE

Ruy Exel

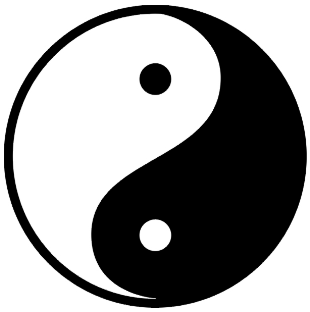
Universidade Federal de Santa Catarina

Palestra apresentada no Primeiro
Colóquio de Matemática da Região Sul
Santa Maria, 29 de Abril de 2010

Yin – Yang

Na filosofia chinesa encontramos um dos mais antigos conceitos de dualidade, o *yin e yang*, que é usado para descrever como forças aparentemente opostas são interrelacionadas e interdependentes no mundo natural. Este conceito está no centro de vários ramos da ciência e filosofia chinesas, assim como é um dos princípios básicos da sua medicina tradicional.

Yin e yang representam a idéia de balanço, onde dois opostos co-existem em harmonia, se complementando e sendo capazes de transmutar-se um no outro.



Algumas da associações comuns com yin e yang são, respectivamente: escuro e claro, passivo e ativo, feminino e masculino, repouso e movimento.

No símbolo do yin e yang existe um ponto do yin dentro do yang e um ponto do yang dentro do yin, simbolizando que os opostos contém, cada um, uma semente do outro.

Segundo o Taoismo, dentro de cada entidade independente existe uma parte do seu oposto. Dentro da doença está a saúde e vice-versa. Isto é porque os opostos são na verdade manifestações do mesmo Tao (a energia que mantém a ordem natural do universo) e portanto não são independentes um do outro, mas sim uma variação da mesma força unificadora.

No ocidente existem várias interpretações erradas segundo as quais yin e yang correspondem ao bem e ao mal, mas a filosofia Taoista considera a distinção bem/mal como supérflua, preferindo focar na idéia de equilíbrio.

Dualismo Moral (bem vs. mal)

Dualismo Moral é a crença no grande conflito entre o *benevolente* e o *malévolo*. Muitos sistemas religiosos tem algum tipo de dualismo moral — nas religiões ocidentais, por exemplo, existe um eterno conflito entre o bem e o mal.

Filosofia da mente (dualismo entre a mente e o corpo)

Zaratustra (628–551 AC), assim como Platão (428–348 AC) e Aristóteles (384–322 AC) especulavam sobre a existência de uma *alma* ou *mente*, distinta do corpo físico, que carregava as faculdades da inteligência e sabedoria.

Uma bem conhecida versão deste dualismo é atribuida a René Descartes (1641), segundo a qual a mente é uma substância não física. Descartes foi o primeiro a identificar claramente a mente com a consciência, distinguindo-a do cérebro, considerado como o assento da inteligência. Portanto ele foi o primeiro a formular a dualidade mente–corpo como a conhecemos hoje.

Física e Química (dualismo entre matéria e onda)

Em Física e Química, a dualidade *partícula–onda* consiste no conceito segundo o qual toda a energia (incluída aí toda a matéria) exibe, simultaneamente, propriedades de partícula e de onda. Sendo um conceito central em mecânica quântica, esta dualidade se refere à inadequação dos conceitos clássicos de partícula e de onda em descrever completamente o comportamento de objetos na escala quântica.

Conjuntos ordenados

Uma das mais elementares dualidades em Matemática vem da teoria dos conjuntos ordenados. Dado um conjunto X com uma ordem "$\leq$", pode-se definir a *ordem dual* "$\preceq$", segundo a qual

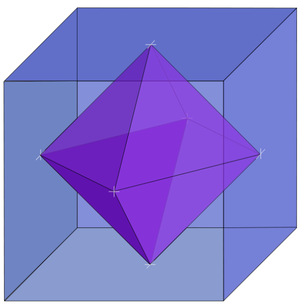
$$x \preceq y \iff y \leq x.$$

Um conceito qualquer para $(X, \leq)$ corresponderá ao conceito dual para $(X, \preceq)$. Por exemplo um elemento mínimo para $(X, \leq)$ corresponderá a um elemento máximo para $(X, \preceq)$.

Outros pares de conceitos duais são elementos maximais/minimais, limitantes superiores/inferiores, supremo/ínfimo.

Dualidade de Poliedros

Dado um poliedro convexo qualquer, para cada uma de suas faces F, considere o seu baricentro F'. O *poliedro dual* é definido como sendo a *envoltória convexa* dos pontos F' assim obtidos.



Assim, a cada face do poliedro primal (original) corresponde um vértice do poliedro dual. Similarmente a cada aresta do primal corresponde uma aresta do dual e a cada vértice do primal corresponde uma face do dual.

POLIEDRO PRIMAL		**POLIEDRO DUAL**
Face	$\leftrightarrow$	*Vértice*
Aresta	$\leftrightarrow$	*Aresta*
Vértice	$\leftrightarrow$	*Face*

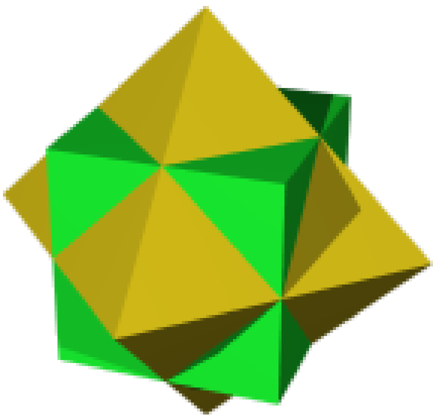
Esta correspondência preserva a relação de incidência no sentido em que, se dois objetos (vértices, arestas, faces) se tocam no poliedro original então os correspondentes também se tocam no poliedro dual.

Assim como na dualidade de conjuntos ordenados, a dualidade de poliedros é *involutiva* no sentido de que, tomando-se o dual duas vezes, obtém-se o objeto original.

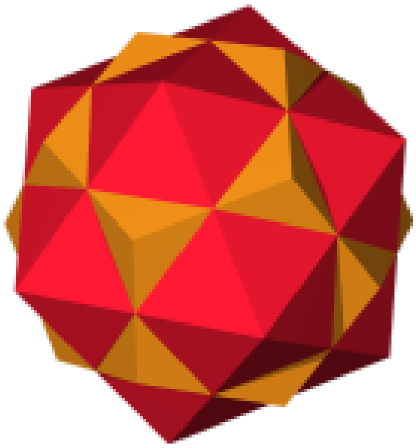
$$\text{PRIMAL} \quad \longrightarrow \quad \text{DUAL} \quad \longrightarrow \quad \text{BIDUAL} = \text{PRIMAL}$$

Dualidade entre os sólidos Platônicos:

Tetraedro $\leftrightarrow$ Tetraedro



Cubo $\leftrightarrow$ Octaedro



Dodecaedro $\leftrightarrow$ Icosaedro

Lógica

Se $P(x)$ é um atributo (propriedade) da variável x, sabe-se que

$$\neg\left(\exists x\ P(x)\right) \iff \forall x\big(\neg P(x)\big).$$

Neste sentido os quantificadores "$\exists$" e "$\forall$" são duais um do outro. Também os conectivos lógicos "$\vee$" e "$\wedge$" são duais pois, se A e B são sentenças lógicas, então

$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$$

De forma muito semelhante, as operações de *união* e *intersecção* para conjuntos são duais pois, se A e B são conjuntos, então

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Topologia

Dado um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que A é *aberto* se para todo ponto $a \in A$, existe um $\varepsilon > 0$, tal que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A.$$

Dado um subconjunto $F \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que F é *fechado* se todo ponto aderente à F pertence à F.

Para quem não sabe, um ponto aderente é um ponto $a \in \mathbb{R}$ (que pode ou não pertencer à F) tal que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap F \neq \varnothing, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Para subconjuntos de $\mathbb{R}$ (ou, mais geralmente, de um espaço topológico) as noções de conjunto *aberto* e *fechado* são duais pois, para qualquer subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$

$$A \text{ é aberto} \iff A^c \text{ é fechado}.$$

Como consequência desta dualidade, a qualquer noção ou teorema relativos a conjuntos fechados corresponde uma noção ou teorema sobre conjuntos abertos.

Por exemplo, é bem sabido que para subconjuntos $A \subseteq \mathbb{R}$:

O $\underline{interior}$ de A é o $\underline{maior}$ conjunto $\underline{aberto}$ $\underline{contido\ em}$ A.
O $\underline{f\hat{e}cho}$ de A é o $\underline{menor}$ conjunto $\underline{fechado}$ $\underline{contendo}$ A.

Por esta razão, o *complemento do interior* de um conjunto coincide com o *fêcho do seu complemento*.

Para citar um outro exemplo, um conjunto é chamado *compacto* quando

"toda cobertura *aberta* admite subcobertura finita"

ou equivalentemente quando

"toda família de conjuntos *fechados* com a propriedade da intersecção finita contém um ponto em comum".

O Teorema de Baire, assim como muitos outros, pode ser enunciado fazendo-se referência a conjuntos *abertos* densos ou, alternativamente, a conjuntos *fechados* sem interior.

Espaços vetoriais

A dualidade de espaços vetoriais é uma das primeiras que um aluno encontra no curso de Matemática.

Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ (ou outro corpo qualquer), define-se o *dual* de V como sendo o conjunto V' formado por todos os funcionais lineares

$$f : V \to \mathbb{R}.$$

É bem sabido que V' é também um espaço vetorial, onde a soma de funções e a multiplicação por escalares é dada por

$$\begin{aligned}(f+g)(v) &= f(v)+g(v),\\ (\lambda f)(v) &= \lambda f(v).\end{aligned}$$

Sendo um espaço vetorial, V' também admite um dual, ou seja V''. Da mesma forma que na dualidade entre os poliedros Platônicos, podemos perguntar se V'' volta a ser V.

Infelizmente isto não é sempre verdade, mas existe uma forte relação entre V e V'', a saber, existe uma função muito interessante

$$\kappa : V \to V'',$$

definida assim: olhando-se para a expressão

$$f(v),$$

quase todo mundo diria que f é a *função* e v é a *variável*. Mas podemos reverter a ordem das coisas, pensando que v é a função e f é a variável! Isto é, podemos considerar a função

$$\begin{array}{cccc}\kappa(v) & : & V' & \to & \mathbb{R}\\ & & f & \mapsto & f(v)\end{array}$$

Ou seja, $\kappa(v)$ não é nada mais que o próprio elemento v, elevado à condição de função.

Prova-se facilmente que $\kappa(v)$ é linear e portanto é um elemento de V''. Fica assim definida

$$\begin{array}{ccccc}\kappa & : & V & \to & V''\\ & & v & \mapsto & \kappa(v)\end{array}$$

Quando V tem dimensão finita pode-se provar que κ é um isomorfismo mas isto não ocorre se a dimensão de V é infinita.

Moral: a dualidade em espaços vetoriais não é sempre involutiva como no caso dos sólidos Platônicos.

Existe também uma teoria de dualidade para espaços vetoriais *normados*. Neste caso define-se V' como sendo o conjunto formado por todos os funcionais lineares *contínuos*. Problemas similares surgem também nesta dualidade.

Teoria de Galois

Um dos aspectos centrais na Teoria de Galois é uma certa dualidade que nem sempre é vista como tal mas que cabe muito bem na nossa lista.

Os objetos de estudo nesta teoria são os corpos. Fixado um corpo L, vamos considerar o conjunto G formado por todos os *automorfismos*

$$\varphi : L \to L.$$

Dizer que φ é um automorfismo é dizer que φ é uma função bijetora e

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

para todo $a, b \in L$.

É fácil ver que G é um grupo por composição.

Por exemplo, se L é o corpo dos números complexos, a função

$$\varphi : z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$$

é um automorfismo importante.

A nossa dualidade será entre:

$$\text{SUBCORPOS DE } L \longleftrightarrow \text{SUBGRUPOS DE } G$$

Definição. Dado um subcorpo $K \subseteq L$, define-se o seu *grupo de Galois*$^{(*)}$ como sendo o conjunto $G(K)$ formado por todos os automorfismos $\varphi \in G$ tais que a restrição $\varphi|_K$ é a identidade.

Definição. Para cada subgrupo $H \subseteq G$, define-se o *corpo fixo por* H, como sendo o conjunto

$$K(H) = \{x \in L : \varphi(x) = x, \text{ para todo } \varphi \in H\}.$$

Assim temos correspondências:

$$\begin{array}{ccc}
\text{SUBCORPOS DE } L & & \text{SUBGRUPOS DE } G \\
K & \longrightarrow & G(K) \\
K(H) & \longleftarrow & H
\end{array}$$

De uma certa forma a Teoria de Galois se preocupa em estudar esta dualidade se perguntando, por exemplo, se a composição dos processos acima resulta na identidade.

$^{(*)}$ PS: Esta é uma forma extremamente simplificada e um tanto tendenciosa de se ver a Teoria de Galois. Se você se interessou, procure estudá-la mais a fundo!

Duplo comutante de von Neumann

Seja M um anel (normalmente não comutativo). Dado um subanel $N \subseteq M$, definimos o *comutante de* N como sendo o sub-anel de M dado por

$$N' = \{a \in M : ab = ba, \text{ para todo } b \in N\}.$$

É óbvio que

$$N_1 \subseteq N_2 \Rightarrow N_2' \subseteq N_2'. \tag{$\star$}$$

Além disto, para todo N, tem-se que

$$N \subseteq N'' \tag{$\diamond$}$$

(*os elementos de* N *comutam com todo mundo que comuta com os elementos de* N). Aplicando-se ($\star$) em ($\diamond$), temos que

$$N''' \subseteq N'.$$

Porém, se utilizarmos ($\diamond$) para N', temos que $N' \subseteq N'''$, ou seja

$$N' = N'''.$$

O famoso *Teorema do Duplo Comutante de von Neumann* diz que se M é o anel de todos os operadores limitados num espaço de Hilbert e se $N \subseteq M$ é um subanel de um tipo especial (subalgebra de von Neumann) então $N'' = N$.

Dualidade de Gelfand

Esta dualidade é uma das ferramentas básicas nas aplicações de Matemática à Mecânica Quântica.

Definição. Uma *álgebra de Banach* é uma álgebra (= anel + espaço vetorial) equipada com uma norma

$$a \in A \mapsto \|a\| \in \mathbb{R}_+$$

que faz com que A seja *completa* relativamente à métrica

$$d(a, b) = \|b - a\|$$

(isto quer dizer que toda sequência de Cauchy converge).

A dualidade de Gelfand é entre:

ÁLGEBRAS DE BANACH COMUTATIVAS COM UNIDADE	$\longleftrightarrow$	ESPAÇOS TOPOLÓGICOS COMPACTOS

Dado um espaço topológico compacto X, vamos construir uma álgebra de Banach chamada $C(X)$.

- Como conjunto, $C(X)$ é formada por todas as funções contínuas
$$f : X \to \mathbb{C}.$$
- A estrutura de álgebra em $C(X)$ é dada pelas operações pontuais de adição e multiplicação.
- A norma em $C(X)$ é definida por
$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

É possível então verificar todas as propriedades acima, de forma que $C(X)$ é uma álgebra de Banach, obviamente comutativa e com unidade (a unidade é a função identicamente igual à 1).

Assim já temos uma parte da nossa dualidade:

$$\begin{array}{ccc} \text{Álgebras de Banach} & & \text{espaços topológicos} \\ \text{comutativas com unidade} & & \text{compactos} \\ & & \\ C(X) & \longleftarrow & X \end{array}$$

No sentido inverso, partimos de uma álgebra de Banach comutativa com unidade A e queremos produzir um espaço topológico compacto.

A idéia é imaginar que $A = C(X)$ e tentar extrair X olhando apenas para a estrutura algébrica de A. Um caminho é notar que um ponto x de X se manifesta algebricamente através da função
$$\varphi_x : f \in A \mapsto f(x) \in \mathbb{C}.$$
Tal função é um homomorfismo de álgebras, isto é, φ_x é linear e
$$\varphi_x(fg) = \varphi_x(f)\varphi_x(g), \quad \forall f, g \in A.$$
Na verdade os únicos homomorfismos de $C(X)$ para $\mathbb{C}$ são desta forma. Portanto, independentemente do fato de A ser $C(X)$, podemos definir o *espectro de* A como sendo o conjunto
$$\Sigma(A) = \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \text{ é um homomorfismo}\}.$$
Existe uma topologia bastante natural em $\Sigma(A)$ que o torna um espaço compacto. Assim temos o outro lado da nossa dualidade:

$$\begin{array}{ccc} \text{Álgebras de Banach} & & \text{espaços topológicos} \\ \text{comutativas com unidade} & & \text{compactos} \\ & & \\ A & \longrightarrow & \Sigma(A) \end{array}$$

O Teorema de Gelfand nos diz que esta é uma dualidade involutiva se nos restringirmos à uma classe especial de álgebras de Banach, a saber as C*-álgebras.

Definição. Uma C*-álgebra é uma álgebra de Banach equipada com uma operação
$$a \in A \mapsto a^* \in A,$$
que é antilinear, involutiva, isométrica e além disto satisfaz

(i) $(ab)^* = b^* a^*$,

(ii) $\|a^* a\| = \|a\|^2$,

para todo a em A.

Dualidades de Stone

A dualidade de Stone se dá entre:

$$\text{ÁLGEBRAS DE BOOLE} \longleftrightarrow \begin{array}{c}\text{ESPAÇOS TOPOLÓGICOS COMPACTOS}\\ \text{TOTALMENTE DESCONEXOS}\end{array}$$

Definição. Uma álgebra de Boole é um conjunto B, equipado com duas operações binárias "$\vee$" (disjunção) e "$\wedge$" (conjunção), uma operação unária $\neg$ (negação) e dois elementos especiais 1 (unidade) e 0 (zero), satisfazendo:

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)} & a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, & a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, & \text{(associativa)} \\
\text{(ii)} & a \vee b = b \vee a, & a \wedge b = b \wedge a, & \text{(comutativa)} \\
\text{(iii)} & a \vee (a \wedge b) = a, & a \wedge (a \vee b) = a, & \text{(absorção)} \\
\text{(iv)} & a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), & a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), & \text{(distributiva)} \\
\text{(v)} & a \vee \neg a = 1, & a \wedge \neg a = 0. & \text{(complementar)}
\end{array}$$

O exemplo mais básico de álgebra de Boole é o conjunto $\{0, 1\}$ com certas operações naturais. Entre outros papéis importantes, este é o conjunto dos *valores de verdade* da lógica clássica!

Outro exemplo importante é o seguinte: dado um espaço topológico compacto X, considere o conjunto $B(X)$ formado por todos os subconjuntos simultaneamente abertos e fechados de X. Interpretando

$$\text{“}\vee\text{”}, \quad \text{“}\wedge\text{”}, \quad \text{“}\neg\text{”}, \quad 0 \ \text{ e } \ 1,$$

respectivamente como

$$\text{“}\cup\text{”}, \quad \text{“}\cap\text{”}, \quad \text{complementação}, \quad \varnothing \ \text{ e } \ X,$$

tem-se que $B(X)$ é uma álgebra de Boole.

Reciprocamente, dada uma álgebra de Boole B, vamos construir um espaço topológico $\Sigma(B)$ da seguinte maneira: os seus elementos serão os homomorfismos booleanos

$$\varphi : B \to \{0, 1\},$$

isto é, as funções que preservam todas as operações. De uma forma muito parecida com o $\Sigma(A)$ da dualidade de Gelfand, pode-se definir uma topologia em $\Sigma(B)$.

Aliás a motivação de Stone para a descoberta desta dualidade é intimamente ligada com a teoria espectral para operadores em espaços de Hilbert que por sua vez tem uma grande relação com álgebras de Banach!

Pode-se provar que $\Sigma(B)$ é um espaço topológico compacto e totalmente desconexo (esta última propriedade significa que todo conjunto aberto é a reunião de conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados). Ficam então construídas as duas vias da dualidade de Stone, a saber,

$$\begin{array}{ccc}
\text{ÁLGEBRAS DE BOOLE} & & \begin{array}{c}\text{ESPAÇOS TOPOLÓGICOS COMPACTOS}\\ \text{TOTALMENTE DESCONEXOS}\end{array} \\
 & & \\
B & \longrightarrow & \Sigma(B) \\
 & & \\
B(X) & \longleftarrow & X
\end{array}$$

O Teorema de Stone afirma que, partindo-se de qualquer um dos lados e fazendo-se uma *ida e volta*, obtém-se um objeto idêntico ao original.

Outras dualidades famosas

(a) Dualidade de Stone generalizada entre álgebras de Heyting e espaços topológicos *sóbrios* (aplicações à lógica intuicionista).
(b) Dualidade de Pontryagin para grupos localmente compactos abelianos (transformada de Fourier).
(c) Dualidade de Pontryagin generalizada para álgebras de Hopf.
(d) Dualidade de Poincaré para grupos de cohomologia de variedades compactas sem bordo.
(e) Dualidade de Hodge para formas diferenciais em variedades Riemannianas orientadas.

Semi-reticulados

Abaixo eu gostaria de descrever uma nova teoria de dualidade com a qual me deparei recentemente envolvendo semi-reticulados e espaços topológicos.

REFERÊNCIAS

- "Cuntz–Krieger algebras for infinite matrices", *J. reine angew. Math.* **512** (1999), 119–172. (Em conjunto com M. Laca)
- "Semigroupoid C*-Algebras", preprint, Universidade Federal de Santa Catarina, 2006, [arXiv: math.OA/0611929].
- "Inverse semigroups and combinatorial C*-algebras", *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **39** (2008), 191–313.
- "Tight representations of semilattices and inverse semigroups", *Semigroup Forum* **79** (2009), 159–182.
- "Reconstructing a totally disconnected groupoid from its ample semigroup", *Proc. Amer. Math. Soc.,* to appear.

Imagine que temos um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, como por exemplo o conjunto de Cantor em $\mathbb{R}$ (tudo isto se generaliza para espaços *topológicos*, para quem sabe o que isto significa).

Considere o conjunto $\mathcal{T}_X$ formado por todos os subconjuntos abertos de X. Obviamente $\mathcal{T}_X$ é um conjunto ordenado por

$$A \leq B \iff A \subseteq B.$$

A proposta é encarar $\mathcal{T}_X$ como conjunto ordenado (portanto um objeto algébrico) e tentar recuperar daí o máximo de informação possível sobre X.

O conjunto vazio $\varnothing$ é um elemento de $\mathcal{T}_X$ que satisfaz

$$\varnothing \leq A, \quad \forall A \in \mathcal{T}_X,$$

e portanto é um *elemento mínimo.*

Note que para todos $A, B \in \mathcal{T}_X$, existe o maior elemento que é simultaneamente menor que A e B, ou seja a interseção $A \cap B$.

Definição. Um conjunto ordenado $\mathcal{S}$ é chamado um *semi-reticulado* se contém um elemento mínimo "0" e para todo $A, B \in \mathcal{S}$, existe um elemento $A \wedge B$ que é o maior elemento simultaneamente menor que A e B.

Para aumentar o desafio vamos trabalhar com menos informação ainda, ou seja, vamos ficar apenas com um subconjunto $\mathcal{S}_X \subseteq \mathcal{T}_X$ bem pequeno, a saber

$$\mathcal{S}_X = \{A \in \mathcal{T}_X : \ \mathrm{diam}(A) < 0.001\}.$$

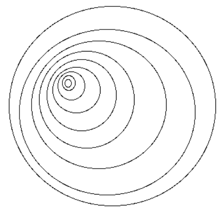
(Nos basta que $\mathcal{S}_X$ seja um sub-semi-reticulado de $\mathcal{T}_X$, e que forme uma *base* para a topologia de X.)

Temos portanto, diante de nós, um semi-reticulado $\mathcal{S}_X$, e a questão é reconstruir X a partir de $\mathcal{S}_X$. A primeira pergunta é:

<u>Como se manifestam os pontos de X do ponto de vista de $\mathcal{S}_X$?</u>

Dado $x \in X$, podemos definir

$$\varphi_x = \{A \in \mathcal{S}_X : x \in A\}.$$



Note que:

(i) $\varnothing \notin \varphi_x$,

(ii) $A, B \in \varphi_x \quad \Rightarrow \quad A \wedge B \in \varphi_x$,

(iii) $B \geq A \in \varphi_x \quad \Rightarrow \quad B \in \varphi_x$.

Definição. Se $\mathcal{S}$ é um semi-reticulado ($\mathcal{S}$ pode ou não ser um $\mathcal{S}_X$) e $\varphi \subseteq \mathcal{S}$ é um subconjunto satisfazendo as propriedades acima, diremos que φ é um *filtro*.

Definição. Seja $\mathcal{S}$ um semi-reticulado. Denotaremos por $X_{\mathcal{S}}$ o conjunto de todos os filtros.

No caso em que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_X$, os pontos de X estão representados em $X_{\mathcal{S}}$ pelos correspondentes φ_x, isto é

$$x \in X \mapsto \varphi_x \in X_{\mathcal{S}}.$$

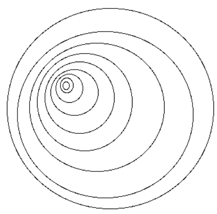
Infelizmente $X_{\mathcal{S}}$ é muito grande; é muito maior que X, pois nem todos os filtros são definidos a partir de um $x \in X$, como acima. Por exemplo, dado um subconjunto não vazio qualquer $Y \subseteq X$, podemos definir

$$\varphi_Y = \{A \in \mathcal{S}_X : Y \subseteq A\}.$$

É fácil ver que φ_Y é um filtro, distinto de todos os φ_x.

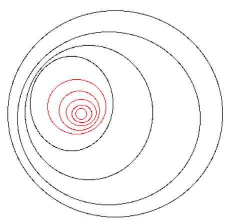
A questão então é decidir quais os filtros são dados por pontos de X.

No caso em que $\varphi = \varphi_x$, como acima, φ consiste de todos os A que contém x e portanto φ pode ser visto como uma forma de *cercar* x!



Pode acontecer que um filtro φ contenha mais elementos que um outro filtro ψ. Por exemplo, digamos que ψ consista de todos os conjuntos representados em preto, abaixo, e que φ consista de todos estes e mais os conjuntos representados em vermelho.

Aparentemente ψ não é suficientemente *fino* e está deixando passar muitos pontos enquanto que φ deixa passar muito menos!



Definição. Diremos que um filtro φ é um *ultra-filtro* se for impossível encontrar um filtro maior que φ.

Por exemplo, se $\varphi = \varphi_x$ então o filtro correspondente é um ultra-filtro.

Definição. Dado um semi-reticulado, denotaremos por

(i) $X_{\mathcal{S}}^{ultra}$ ao conjunto de todos os ultra-filtros,

(ii) $X_{\mathcal{S}}^{\infty}$ ao fêcho de $X_{\mathcal{S}}^{ultra}$ relativamente à uma certa topologia no espaço $X_{\mathcal{S}}$ de todos os filtros.

Nota importante. Embora a definição de $X_{\mathcal{S}}^{\infty}$ seja topológica (fêcho!) é possível caracterizar algebricamente quais homomorfismos pertencem a $X_{\mathcal{S}}^{\infty}$.

Assim temos uma dualidade!

$$\begin{array}{ccc} \text{ESPAÇOS TOPOLÓGICOS} & & \text{SEMI-RETICULADOS} \\ X & \longrightarrow & \mathcal{S}_X \\ X_{\mathcal{S}}^{\infty} & \longleftarrow & S \end{array}$$

Teorema. Se X é um espaço topológico Hausdorff, compacto e totalmente desconexo e $\mathcal{S}$ é uma base para a topologia de X formada por abertos compactos então X é canonicamente homeomorfo à $X_{\mathcal{S}}^{\infty}$.

FIM