

## 2 A LÓGICA DEDUTIVA E O MÉTODO AXIOMÁTICO

Como é que funciona o método axiomático? Para responder a esta pergunta, precisamos fazer outra pergunta preliminar: Como provamos que algo é verdade, ou mais geralmente, como adquirimos conhecimentos (confiáveis)? Vamos ver alguns métodos, exemplificando seu uso, seus pontos fortes e suas debilidades.

### 2.1 Experiência

A experiência, seja ela aleatória<sup>1</sup> ou planejada (tentativa ou pesquisa), é uma maneira de adquirir conhecimentos. Batata frita com ketchup é bom ou não é? Tem que experimentar para saber. Como foi que os homens primitivos acharam as verduras e cereais como trigo, centeio e aveia? Será que eles levaram amostras dos grãos até um laboratório para serem analisadas para determinar se eram comestíveis e nutritivas? Ou será que alguém os experimentou e achou bons e passou a comer e cultivá-los. Crianças aprendem com as suas experiências todo dia, é a forma que elas mais usam para adquirir conhecimento.

A aquisição de conhecimento através da experiência tem limites: a possibilidade de realizar ou não a experiência, ou até em imaginar que podia sequer experimentar tal coisa. Em 1920, se construía um exemplar de um avião novo e só depois disto se fazia testes para ver se voava e para determinar seu desempenho. Será que a Boeing pretende gastar várias centenas de milhões de dólares para construir, às cegas, uns três ou quatro protótipos diferentes para o seu novo 797 e ver qual tem o desempenho mais adequado? Neste caso a experimentação será muito cara e pouco recomendável. Experiência é completamente inútil para determinar a massa da lua ou o diâmetro de um elétron. Esta metodologia depende fundamentalmente de observações e do uso dos nossos não tão confiáveis sentidos, visão, audição, olfato, gosto e tato, para fornecer informações e estabelecer verdades.

### 2.2 Autoridade

Às vezes apelamos para uma autoridade para nos *decretar* a verdade. Sua mãe dizia que óleo de fígado de bacalhau era bom para você, e mamãe sempre sabe o que é bom (mas com um gosto insuportável) para os filhos. Todo dia seus professores lhe informam sobre os mais diversos assuntos e, de modo geral, você aceita esta informação como sendo verdadeira. Afinal, seu professor conhece o assunto que ensina. A totalidade da informação do nosso primeiro capítulo foi obtida apelando para as autoridades da história antiga. Certamente não estávamos lá para saber de experiência própria e não temos tempo, conhecimento ou material para fazer nossas próprias pesquisas. Simplesmente acreditamos na competência destes autores e aceitamos suas informações como a verdade. Este método é usado constantemente nas ciências humanas e sociais. Ele serve até como embasamento para uma das áreas mais ativas na computação e engenharia de produção, os chamadas sistemas especialistas.

Vimos exemplos dos problemas que podem ocorrer com esta metodologia no relato sobre a China e a biblioteca de Alexandria no capítulo I. A confiança nas verdades apresentadas numa obra é diretamente relacionada com a competência (nem sempre tão competente) da autoridade. Às vezes nem as melhores autoridades conseguem apresentar uma história confiável, simplesmente por que não há dados suficientes para dar apoio a qualquer afirmação sobre o assunto. As crenças pessoais da autoridade, por mais que ela tente evitar, sempre afetam seu pensamento e relato, especialmente quando faltam dados para esclarecer definitivamente um assunto.

---

<sup>1</sup> aleatório: que depende de acontecimentos futuros, incertos; casual

## 2.3 Revelação

Há uma terceira metodologia, a revelação, reservada quase exclusivamente para as verdades religiosas.

*José sabia que Maria, apesar de grávida, era uma virgem porque um anjo revelou isto a ele num sonho. Deus apareceu para Moisés num arbusto em chamas e revelou seu destino como o libertador dos judeus no Egito.*

Na universidade, temos o hábito de desprezar a **revelação**. Dizemos ser uma metodologia sem fundamentação e chamamos as verdades assim obtidas por **crenças**. Mas será que podemos julgar os fundamentos de uma metodologia de pensamento? Sabemos que no Vaticano, revelação é uma metodologia bastante prestigiada de adquirir conhecimentos. Também garantimos que muito mais homens morreram por causa de verdades (religiosas) obtidas por revelação do que por causa de verdades matemáticas. Avisamos que aqui não é o Vaticano; esta disciplina se chama Geometria Euclidiana e não Teologia; conversas com anjos não serão levadas em conta.

## 2.4 Raciocínio

Chegamos ao **raciocínio lógico**, a metodologia que pretendemos prestigiar. O raciocínio lógico é dividido em três ramos principais, **analogia**, **dedução** e **indução**<sup>2</sup>.

### 2.4.1 Raciocínio Indutivo

Raciocínio indutivo começa com uma série de **casos particulares**, dos quais pretendemos induzir algum princípio mais **geral**.

*Os povos antigos notaram que o sol nascia toda manhã no leste e se punha toda tarde no oeste. Assim, induziam que o sol sempre nasceria no leste.*

Nas ciências físicas e biológicas, pesquisadores freqüentemente usam este método. Pesquisadores notaram em centenas de experiências que um certo fungo mata bactérias estreptococos, e **induziram** que a penicilina servirá como remédio contra pneumonia. Um físico tentou fabricar um cronômetro e estudou detalhadamente o comportamento de molas. Dos resultados deste estudo temos a Lei de Hooke<sup>3</sup> para molas.

*Em resumo, o raciocínio indutivo é usado para tentar estabelecer verdades gerais a partir de uma série de verdades específicas, obtidas geralmente por observações.*

Este tipo de raciocínio às vezes consegue trazer ordem num assunto antes em total desordem, mas ele tem um ponto fraco.

Observamos que as praias de Coqueiros, Cacupé, Saco Grande, Saco dos Limões, de

---

<sup>2</sup> analogia:....; indução: conclusão; raciocínio em que, de fatos particulares, se tira uma conclusão genérica.  
dedução:....<

<sup>3</sup> Em 1660 Robert Hooke estabeleceu uma lei que relaciona a Força Elástica (Fel) com a deformação produzida na mola que é a seguinte: "A intensidade da força elástica é proporcional à deformação causada por ela".

Fora e do Canto são poluídas e induzimos que todas as praias de Florianópolis são poluídas e impróprias para banhistas. Nossa conclusão é falsa porque a praia de Campeche não é poluída. Veja que apontamos um fato para o qual os dados não são suficientes. Todas as praias na lista de praias poluídas estão na baía, e Campeche é praia de mar aberto. Há uma variável nesta amostra de praias que não tínhamos percebido e ela impede que cheguemos a uma conclusão tão geral.

Induzimos, então, que todas as praias da baía são poluídas. Acontece que a praia do Forte está na baía e não está poluída. Induzimos a lei de Hooke sobre molas e ela funciona; induzimos a Lei da Poluição e ela não funciona. Socorro!

*Aparentemente, o máximo que o raciocínio indutivo pode fornecer é uma teoria geral com alto grau de probabilidade de estar correta.*

Einstein sempre falava que as leis da relatividade valerão até o dia em que alguém ache um contra-exemplo, exatamente como ele achou contra-exemplos às leis de Newton.

### 2.4.2 Analogia

Às vezes, raciocinamos por analogia. Observamos uma situação semelhante àquela que enfrentaremos e induzimos que o resultado será o mesmo ou pelo menos semelhante.

*Semestre passado, quase todos os alunos de geometria foram aprovados e você é tão inteligente e esforçado quanto eles; portanto, você também alcançará nota de aprovação. Hoje é um dia, ontem era um dia e amanhã também será. Um período de vinte e quatro horas contíguas é igual a qualquer outro. Portanto, por analogia, o tempo amanhã será o mesmo que hoje.*

Raciocínio por analogia se baseia no princípio que o universo e tudo dentro dele é uniforme e que condições iniciais semelhantes produzirão resultados semelhantes. Este raciocínio pode até funcionar às vezes, e certamente serve para nortear nosso raciocínio, na falta de outros indicadores mais fortes. Infelizmente, sabemos que o universo não é uniforme e que condições iniciais semelhantes não precisam produzir resultados semelhantes. Com o desenvolvimento de modelos não lineares para fenômenos físicos e o uso de recursos computacionais, encontramos contradições em toda parte. Encontramos tantas contradições que estamos desenvolvendo novas técnicas para lidar com elas, a geometria fractal e a teoria do caos.

### 2.4.3 Raciocínio Dedutivo

Chegamos finalmente ao raciocínio dedutivo, a metodologia que **nós usaremos para raciocinar**. Se você quer provar que uma declaração<sup>4</sup>, cujo nome digamos seja A, é verdadeira, você precisa que **mostrar** que uma outra declaração, digamos B, é verdadeira e que A **segue logicamente** dela, ou seja de B. Em resumo:

*Se B é verdade então A é verdade.*

Se há dúvidas sobre a veracidade da sua declaração B, você tem que **mostrar que ela segue** de uma declaração C e que C **segue** de D e que D **segue** de E etc, até chegar em uma

---

<sup>4</sup> declaração: afirmação; explicação; manifesto

declaração que é aceita como verdadeira.

*Se E então D . Se D então C. Se C então B. Se B então A.*

Quer dizer, o **raciocínio lógico dedutivo** consiste em provar a veracidade de uma declaração **exclusivamente baseado** na veracidade de outras declarações e o **uso de regras de inferência**<sup>5</sup> bem delineadas.

Há um problema muito grande neste esquema simplificado na forma como está sendo proposto! Você poderá ter uma tarefa ingrata e interminável de produzir cada vez mais declarações que levem você à declaração desejada, só para ouvir: "Não acredito nisso, nem que sua declaração segue disso." Se não temos um **ponto de partida** e **regras de trânsito** bem determinadas, não iremos longe. Esta discussão nos sugere que há (pelo menos) duas exigências para o bom funcionamento deste método de raciocínio dedutivo.

**Exigência 1:** Temos a certeza da veracidade de certas declarações chamadas de **premissas**<sup>6</sup> ou **hipóteses** (ou axiomas ou postulados).

**Exigência 2:** Concordamos no que diz respeito a como e quando uma declaração **segue logicamente** de outra.

Mas nem estas exigências salvará você de uma sequência infinita de explicações. Ao invés de implicar com a sua declaração, alguém começa a implicar com as palavras que vc usou. Ele diz que não aceita sua declaração porque não entende o **sentido** de uma das palavras dela. Se olharmos no dicionário à procura da palavra *verde*, vemos que é uma combinação de azul e amarelo.

*Ótimo! Antes você tinha uma palavra problema e agora tem duas.*

Vemos que azul é a cor do céu num dia sem nuvens e que amarelo é a cor de âmbar. Bom, o que é céu? Ah, é aquela *coisa* lá em cima, e se esperamos um dia ou dois (ou vinte, em agosto) o veremos sem nuvens para observar a cor que aparenta ter. Entendemos o que é azul; entendíamos o que era azul antes e independentemente das nossas declarações! E o amarelo - âmbar? Continuamos no dicionário e descobrimos que âmbar é uma substância resinosa fossilizada de cor amarela.

*Jóia: amarelo é a cor de algo que é da cor amarelo!*

Não temos esperanças de definir as palavras que usaremos dentro do nosso sistema. Temos que aceitar a linguagem comum, vocábulo e gramática, e identificar **certos termos** ou símbolos técnicos chamadas **primitivos** cujos significados não serão o comum, mas aqueles **regulamentados** pelos **axiomas** do sistema. Se não fizermos isto correremos o risco de ter definições que dependem uma das outras ou sequências infinitas de explicações. Isso nos mostra a necessidade de mais uma exigência sobre a utilização do método axiomático.

**Exigência 3:** Para aplicar o raciocínio dedutivo temos que dominar bem a linguagem comum (neste caso português) e escolher os termos primitivos.

---

<sup>5</sup> inferência: sinônimo de indução

<sup>6</sup>

Este processo de raciocínio lógico dedutivo parece ser infalível, e é. Mas ainda falta **escolher** as declarações iniciais que vamos supor verdadeiras. Vamos voltar um pouco a discussão das tais declarações iniciais.

Todo o raciocínio dedutivo é baseado em conclusões alcançadas a partir de declarações iniciais.

*Se eu tivesse um milhão de reais, compraria um carro importado. Tenho um milhão de reais. Portanto comprei um carro importado.*

Neste exemplo, a conclusão segue inexoravelmente das premissas. Meu único problema é satisfazer as premissas. Para estudar a geometria plana por via da lógica dedutiva, é necessário escolher certas declarações que diremos ser *verdadeiras (não precisaremos mostrar que seguem de outras)*, antes de poder começar a raciocinar. Estas declarações iniciais são chamadas **axiomas** ou **postulados**. Assim, um sistema axiomático e o raciocínio dedutivo estão intimamente relacionados um com outro.

*Muito bem, precisamos de **axiomas**. De onde eles vêm?*

Voltemos a nossas considerações históricas por um momento. Como vimos no Capítulo I, Tales parece ter sido o primeiro matemático grego a se preocupar com demonstrações dedutivas. Aparentemente, ele iniciou seus estudos com base nas suas experiências com a matemática intuitiva<sup>7</sup> egípcia. Quando chegamos a Euclides, vimos uma geometria exclusivamente dedutiva, supostamente destituída de qualquer observação física ou consideração intuitiva.

Para os gregos platônicos, as coisas que observamos com nossos sentidos não são verdadeiras. Elas são imagens distorcidas da verdade pelas imperfeições dos nossos sentidos. As únicas verdades eram aquelas concebidas pela razão.

Como exemplo, eles desprezavam o estudo da circunferência, porque ela era simplesmente um desenho imperfeito no papel; o que merecia estudo era o conceito de circularidade, uma idéia abstrata que pode ser tratada somente pela mente.

Se eles desprezavam a experiência, e se a lógica dedutiva não pode fazer coisa alguma sem um ponto de partida, como era que eles começavam o estudo da geometria - de onde vieram seus axiomas? Foi aí que fizeram uma espécie de pulo de gato e apelaram para a revelação.

*O método socrático<sup>8</sup> de aprendizagem é um método onde o professor faz perguntas simples ao aluno até este perceber por ele mesmo a solução do problema. Sócrates (e os outros pensadores gregos) acreditava que a pessoa já nascia com estes conhecimentos na mente e que era necessário somente lembrá-los.*

Bem, supondo que Sócrates tinha razão, já que temos estes conhecimentos trazidos desde o nascimento, bastaria escolhermos alguns dos mais evidentes que todo mundo reconhece sem estímulo externo como **axiomas** (e daí usarmos o raciocínio dedutivo para alcançar os outros).

Hoje em dia escolhemos os axiomas iniciais de uma teoria matemática de maneira

---

7

8

bem diferente, usamos nossa experiência, intuição e percepção.

*No caso de vocês podem pensar no que aprenderam na Geometria Quantitativa para imaginar como deve ser o plano.*

Aí, adotamos algumas propriedades bastante simples e universalmente aceitas do plano como axiomas. A partir destes axiomas e com o uso da lógica dedutiva, tentamos decidir se outras declarações **não mais tão óbvias** são, ou não, verdadeiras.

A geometria plana é, por definição, o conjunto de declarações verdadeiras que seguem destes axiomas.

Assim, são os axiomas que definem a geometria e não a geometria que define os axiomas.

*É claro que, se você visualiza um jogo, tipo futebol, por exemplo, você adotará regras que são compatíveis com sua visão do jogo. Mas mesmo assim, o jogo de futebol é aquele regulamentado pelas regras.*

O mesmo acontece com a geometria. Escolhemos os axiomas conforme nossa visão do que deveria ser um plano e se escolhermos mal teremos que refazer nossa escolha (ou aceitar que a geometria não é o que imaginávamos no início)

A partir do próximo capítulo iremos **adotar** um sistema de axiomas para a geometria plana chamado de **Axiomas de Hilbert**. Mas antes disso, para iniciar-nos no estudo do método axiomático e ao mesmo tempo observar o desenvolvimento histórico vamos olhar para um exemplo de um sistema axiomático para o plano - uma versão modernizada dos **Axiomas de Euclides**.

Queremos aqui alertar você de que esta versão que veremos a seguir possui algumas deficiências nas definições e axiomas, e não tentaremos corrigi-las. Mas não se desespere, no capítulo III com os Axiomas de Hilbert cuidaremos de todos os mais ínfimos detalhes.

**\*\*\* Alunos de Geo Euclídiana 06.1 -> sigam para cap III \*\*\***

Então vamos ao Sistema “bolado” por Euclides. Neste sistema, ele tenta definir os termos primitivos que são, entre outros:

**ponto** - sem largura ou comprimento, um lugar no plano e

**reta** - os caminhos em que os pontos são alinhados.

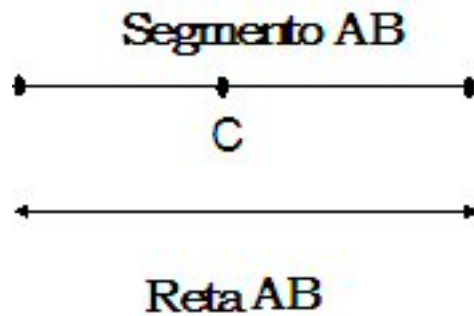
Os termos **pertencer a** ou **passar por**, e **estar entre** são usados como termos da linguagem comum; ele nunca usou a palavra **congruente**. Notamos que as “definições” acima pouco esclarecem a natureza do objeto que está sendo definido. Neste momento é preciso escolher os axiomas - verdades incontestáveis que servem para regulamentar o comportamento destes termos e a inter-relação deles um com o outro. Euclides deu cinco axiomas para a geometria plana. (só que ele os chamou de Postulados).

**Axioma 1:** Para cada ponto P e cada ponto Q, não igual a P, existe uma única reta  $r$  tal que  $r$  passa por P e Q.

**Definição:** Dados dois pontos distintos A e B, o segmento AB é a coleção que consiste

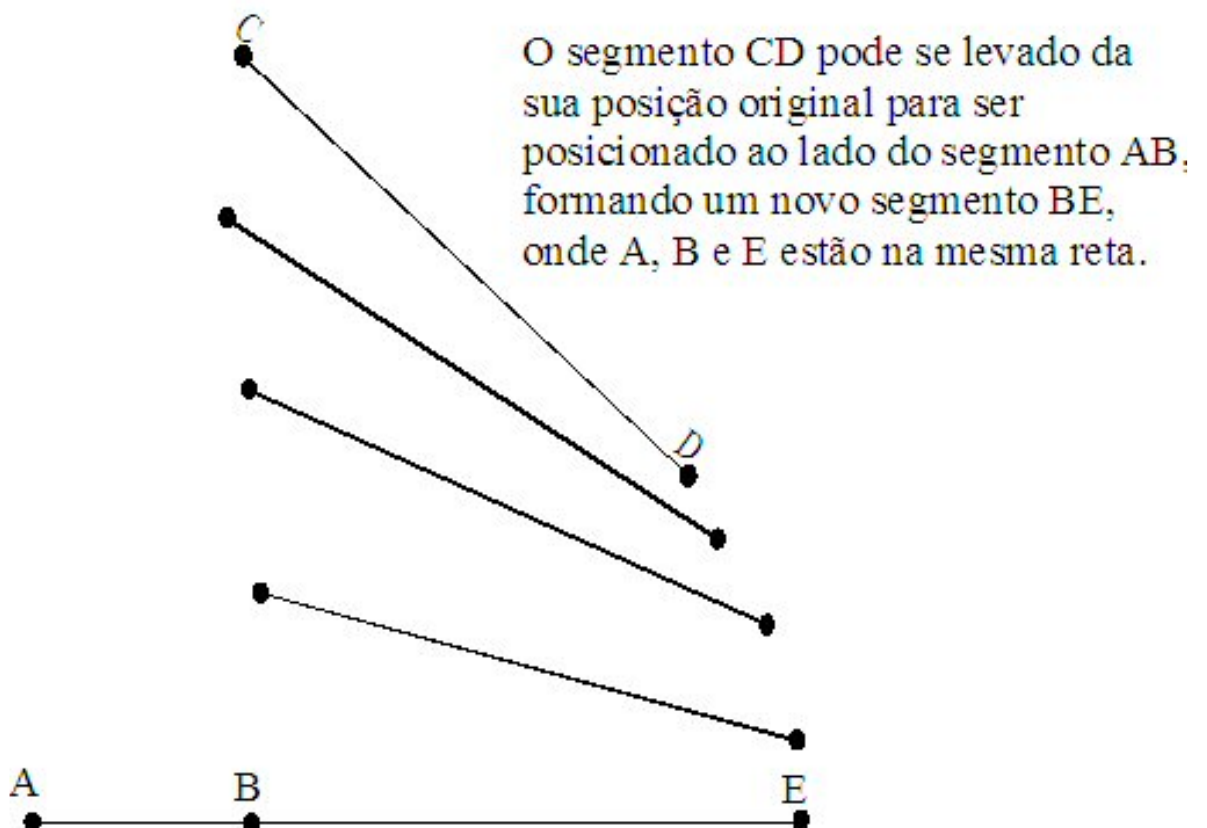
de A, B e todos os pontos que pertencem à reta que passa por A e B (que existe devido ao Axioma 1) e estão entre A e B. Os pontos A e B são chamados de pontos extremos do segmento.

Conforme nosso desenho vimos um exemplo do que significa que o ponto C está entre A e B.



**Axioma 2:** Para cada segmento AB e para cada segmento CD, existe um único ponto E tal que B está entre A e E e CD é congruente<sup>9</sup> a BE.

Este axioma pode ser expresso sem formalidades de outro modo, menos preciso mas mais natural: dados dois segmentos, um segmento de "comprimento" igual ao primeiro pode ser "colado" ao lado do segundo.




---

9

Para enunciar o terceiro axioma precisamos de mais uma definição. Este terceiro axioma, tendo em vista as idéias da teoria de conjuntos, poderia ser dispensado e substituído pela própria definição. Manteremos o axioma por razões históricas: na geometria clássica, dizer que um objeto geométrico existia era equivalente a dizer que se podia **desenhá-lo com régua e compasso**.

**Definição:** Dados dois pontos distintos A e O, o lugar geométrico de todos os pontos P tais que o segmento OP é congruente ao segmento OA é chamado de circunferência com centro O. Cada um dos segmentos OP é chamado de raio.

<ABRIR QUADRO-DESTAQUE>

**Axioma 3:** Para cada ponto O e para cada ponto A não igual a O, existe uma circunferência com centro O e raio OA.

<FECHAR QUADRO-DESTAQUE>

A seguir apresentamos as três definições: semi-reta, semi-retas opostas e ângulo.

**Definição:** A semi-reta é constituída dos pontos da reta  $\overleftrightarrow{AB}$  que pertencem ao segmento  $\overline{AB}$  e dos pontos C da reta  $\overleftrightarrow{AB}$  tais que B está entre A e C. Além disso, diz-se que a semi-reta  $\overrightarrow{AB}$  se origina em A e faz parte da reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .

**Definição:** Semi-retas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são opostas se elas são distintas, se elas se originam do mesmo ponto A e se fazem parte da mesma reta  $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ .

**Definição:** Um ângulo com vértice A é um ponto A juntamente com duas semi-retas não opostas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  emanado de A chamadas os lados do ângulo.

Notamos que esta definição não permite ângulos de  $0^\circ$  nem ângulos maiores ou iguais a  $180^\circ$ . Usa-se a notação  $\sphericalangle A$ ,  $\sphericalangle BAC$  ou  $\sphericalangle CAB$  para denotar este ângulo. Vamos continuar as definições em busca do próximo axioma parecido com o que Euclides escolheu, que se referia a um **ângulo reto**.

**Definição:** Se dois ângulos  $\sphericalangle BAD$  e  $\sphericalangle CAD$  têm um lado AD em comum e os outros dois lados  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  formam semi-retas opostas, os ângulos são suplementos um do outro ou são chamados ângulos suplementares.

**Definição:** Um ângulo é chamado **ângulo reto** se ele tem um ângulo suplementar que é congruente a ele.

**Axioma 4:** Todos os ângulos retos são congruentes.

Estamos prontos para enunciar o último e quinto axioma, o **axioma das paralelas**, salvo por um pequeno detalhe:

*O que significa paralela?*

Há duas propriedades freqüentemente associadas com paralelas: não se cruzar e ser equidistantes. Como queremos um sistema axiomático, temos que escolher ou uma ou outra



propriedade; podemos tentar manter as duas, provando que as duas são equivalentes, mas não conseguiremos! Este problema das paralelas deu muita dor de cabeça aos geômetras. Muitos pensaram que **não havia necessidade** de um axioma sobre paralelas, que poderia ser provado dos outros. Não pode. Aparentemente o próprio Euclides não gostou muito dele; adiou e limitou seu uso o máximo possível. Apresentamos a seguir uma variante do axioma de Euclides, um que é mais simples na sua estrutura, mas logicamente equivalente a aquele usado por Euclides.

**Definição:** Duas retas são paralelas se elas não se cruzam (não têm um ponto em comum).

Note que não dizemos coisa alguma sobre as retas serem equidistantes ou não, nem pretendemos dizer, pelo menos por enquanto. Faremos como os políticos, tomamos uma posição firme - bem em cima do muro.

**Axioma 5 (das Paralelas de Euclides):** Para cada reta  $l$  e cada ponto  $P$  que não pertence a  $l$ , existe uma única reta  $m$  que passa por  $P$  e é paralela a  $l$ . (Na realidade, este é um teorema nos *Elementos* e deve ser chamado o Axioma das Paralelas de Playfair<sup>10</sup> que o apresentou como um substituto para o original de Euclides.)

Notamos que este axioma é bem diferente dos outros quatro. Os **dois primeiros axiomas** são abstrações de atividades de desenho com lápis e régua. O **terceiro** é nada mais que dizer que podemos girar o braço do compasso com o lápis ao redor do seu braço fixo - mais uma abstração de nossas experiências com desenho. O **quarto** é um exercício no uso do transferidor, com um único ângulo marcado. O **quinto** axioma fala sobre o comportamento global de reta, quer dizer o que (não) faz quando vai ao infinito (seja lá o que é isso). O primeiro axioma se refere a uma reta infinita, mas, basicamente, ele usa o desenho de um pedaço da reta e a idéia de estendê-la para sempre. Não há qualquer exigência sobre seu comportamento longe do ponto. No quinto axioma, há uma exigência deste tipo. Este fato traz um problema prático. Como podemos provar que duas retas são paralelas? Teremos que mostrar que elas nunca se encontram? Como faremos isso? Será necessário desenvolver **técnicas de raciocínio indiretas** que usam outros critérios além do uso direto da definição para esta verificação.

## 2.5 Lógica Informal

Temos nossos **termos primitivos** e nossos **axiomas**, mas não identificamos ainda como usá-los em argumentos lógicos para provar **outras declarações**.

*Estamos na situação da pessoa que diz saber jogar xadrez porque sabe os nomes das peças e suas posições iniciais no tabuleiro. Sabemos montar o jogo mas não movimentar as peças. Esta analogia de matemática axiomática e um jogo de xadrez é muito fiel à realidade da situação. Podemos querer colocar uma torre nossa numa certa casa para atacar o rei inimigo, bem como reposicionar um cavalo para consolidar nossa própria defesa. Neste momento, nosso oponente gritará bravamente e chamará o juiz, que nos advertirá por ter feito uma jogada ilegal.*

Sua situação no sistema axiomático é exatamente a mesma; você conhece certos **fatos** (tem

---

<sup>10</sup>

suas peças numa certa disposição) e quer afirmar que **outra declaração** é verdade (quer chegar a outra configuração). Somente pode fazer isso se agir dentro dos padrões estabelecidos pelas **regras do jogo**, movimentando uma peça de vez. Muito bem, quais são essas regras e porque são essas e não outras?

*Em joguinhos de futebol lá no interior, longe daqui, é comum os juízes apitarem e marcarem faltas difíceis de serem identificadas quando o time visitante está atacando o gol do time da casa. Foi-nos dito que o juiz tinha marcado uma falta muito grave, chamada perigo de gol. Não conseguimos achar esta falta em lugar algum das regras da FIFA, mas nos disseram que é uma regra indispensável para a boa saúde do juiz.*

Claro, isto não acontece aqui no nosso curso. Aqui jogamos pelas regras, mesmo que o time da casa perca e a torcida reclame. Quer dizer, não podemos **criar regras** no meio do jogo. Isto nos indica mais uma **exigência** do nosso **método axiomático**.

**Exigência 4:** Nenhum fato externo ao método pode ser utilizado na **demonstração** de uma declaração.

O objetivo de listar termos primitivos e axiomas é de deixar claro as regras do jogo. Todo mundo conhece e joga pelas mesmas regras.

*Um time pode pressionar um juiz e forçá-lo a marcar um perigo de gol para se salvar de umas pedradas da torcida, mas este time não mais está jogando futebol; está jogando Intimidação.*

## 2.6 Teoremas e Demonstrações

O que é um teorema?

Um teorema nada mais é que uma frase declarativa que é verdadeira.

Em sistemas lógicos como este que estamos construindo, é comum exigir que esta declaração verdadeira possa ser provada **usando somente as regras, os axiomas e os teoremas já conhecidos** do sistema. Esta última exigência faz sentido, porque elimina do rol dos teoremas e declarações verdadeiras que somente podem ser comprovadas usando métodos que não pertencem ao nosso sistema e, portanto, sem interesse para nós (veja a exigência 4). Todos os teoremas (com raras exceções) de um sistema dedutivo são do tipo

**SE** [ hipótese ] **ENTÃO** [ conclusão ].

Às vezes um teorema está escrito em outra forma, mas ele geralmente pode ser transformado em uma frase desta forma. Por exemplo o teorema

*Lados opostos de um paralelogramo tem comprimentos iguais*

não tem a forma “se ... então ...” mas pode ser transformado na frase:

*Se A e B são lados opostos de um paralelogramo, então A e B tem comprimentos iguais.*

que tem a forma desejada. Há exceções a esta regra. Ocasionalmente encontramos teoremas

com a forma

[uma declaração] **SE E SOMENTE SE** [outra declaração].

Apesar de aparentar ser uma exceção, no fundo, não é. Na prática, esta frase é transformada em duas frases da forma padrão:

*Se [uma declaração] então [outra declaração]. Se [outra declaração] então [uma declaração].*

Uma frase do primeiro tipo é chamado **frase condicional** e uma do segundo tipo de **bicondicional**. Assim uma frase bicondicional nada mais é que **duas** frases do tipo padrão, quer dizer, **condicionais**.

Estas frases são chamadas **condicionais** porque elas afirmam que algo (a conclusão) é verdadeira sob a condição que outra (a hipótese) seja verdadeira. É fundamental a identificação tanto da **hipótese** como da **conclusão** (ou tese) e sem confundir qual é qual.

Para facilitar esta identificação de **hipótese** e **tese**, bem como estimular uma maior precisão nas demonstrações dos teoremas, você deverá escrever **folhas demonstrativas** para listar e assinalar claramente os componentes do teorema e sua demonstração. No fim deste capítulo há um exemplar explicativo desta folha, olhe-a atentamente.

Há outro tipo de frase não condicional. Considere a frase

*Ana fica bonita quando ela se veste bem.*

Neste frase temos uma **hipótese ou pré-condição** e uma **tese ou conclusão**. Trocando a ordem das afirmações na frase fica mais claro o que é **hipótese** e o que é **tese**:

*Quando Ana se veste bem ela fica bonita.*

Agora fica fácil transformar para a forma “se ... então ...”:

*Se Ana se veste bem então ela fica bonita*

Considere agora a frase

*Ana é inteligente.*

Nesta frase as coisas são bem diferentes. Ana pode ser feia quando ela usa aquelas roupas manchadas e rasgadas que ela tem em casa; só afirmamos que ela fica bonita quando usa uma roupa melhor. Na segunda frase, dizemos que Ana é inteligente em roupa elegante, em roupa suja, em qualquer circunstância. A inteligência da Ana **não depende** de nenhuma precondição. Neste caso dizemos que a hipótese é **vazia** ou que não há hipótese.

Que tipo de **justificativa** podemos oferecer nas **folhas demonstrativas**? Podemos classificar estas justificativas em seis categorias gerais, cinco das quais já explicitamos. Estas categorias são:

1. **por hipótese** - cada demonstração começa com a hipótese (e termina com a tese - pelo menos quase todas);
2. **por axioma**;
3. **por teorema** - um que foi provado anteriormente (portanto a conveniência de tê-los

enumerados);

**4. por definição** - não esqueça que você tem que dizer qual axioma, teorema ou definição;

**5. devido a tal afirmação anterior nesta mesma demonstração** - não pode usar passos de demonstrações de outros teoremas;

**6. por regra ou argumento da lógica.**

Está na hora de ver o que temos nesta sexta categoria. Este será nosso último trabalho preliminar **antes de começar o estudo da geometria**, que será no Capítulo III.

## 2.7 As regras de Lógica ou os Argumentos Lógicos

Devemos distinguir entre **teoremas** e **argumentos**. Teoremas são declarações sobre o assunto em estudo, que no nosso caso é a geometria plana. Argumentos são processos de raciocínio lógico que usamos para decidir se uma declaração é, ou não, verdadeira. Por ser um processo, **argumentos** não podem ser verdadeiros ou falsos - eles são **válidos** ou **não válidos**.

### 2.7.1 Os argumentos válidos

Pensemos um momento numa linha de montagem e o produto sendo montado. O produto é nossa **declaração** e a linha de montagem o nosso **argumento**. Nunca perguntamos se o produto, digamos uma boneca, é eficiente ou econômica porque não são qualidades de bonecas. O mesmo acontece com argumentos e teoremas. A tentativa de misturar as coisas pode causar muita confusão que devemos tentar evitar.

Nosso objetivo é identificar processos lógicos que são **válidos** e podem ser usados em argumentos válidos.

Apresentamos a seguir quatro exemplos para tentar mostrar a diferença entre argumentos válidos e conclusões verdadeiras. Considere o argumento:

*Todos os filósofo permanecem solteiros a vida inteira.  
Henrique VIII da Inglaterra foi um filósofo.  
Portanto, Henrique VIII permaneceu solteiro a vida inteira.*

Afirmo que este argumento é **válido** (e veremos a seguir por quê). Entretanto sua conclusão é tragicamente **falsa**, como os espíritos de várias das seis esposas oficiais de Henrique VIII podem atestar. Nosso argumento é válido, mas (pelo menos) uma das declarações usadas nele é falsa.

Como é o teor deste processo? Lembre-se de olhar para o **processo** e não para o **produto** - as frases específicas.

*Todo  $x$  tem propriedade  $P$ .  
 $B$  é um  $x$ .  
Portanto  $B$  tem propriedade  $P$ .*

Vamos repetir o argumento, mas com frases diferentes.

*Todos os filósofos permanecem solteiros a vida inteira.*

*James Bunachan foi um filósofo.  
Portanto, Platão permaneceu solteiro a vida inteira.*

Neste caso o argumento é **válido** e a conclusão é **verdadeira**, mas o argumento **não prova** a conclusão. Acontece que James Buchanan não era filósofo, mas, sim, um dos piores Presidentes que os Estados Unidos já teve.

Repetimos mais uma vez.

*Todos os poodles têm cabelos encaracolados.  
Freeway é um poodle.  
Freeway tem cabelo encaracolado.*

Continuamos com o mesmo argumento, mas neste exemplo todas as **premissas** são verdadeiras e a **conclusão** também é. Podemos dizer que este argumento **serve para provar** que *Freeway* tem cabelo encaracolado.

Olhemos para outro argumento.

*Todos os comunistas repudiam discriminação racial.  
Martin Luther King repudiava discriminação racial.  
Portanto, Martin Luther King era um comunista.*

Os **pressupostos** deste argumento são **verdadeiros** mas a **conclusão é falsa**. Acontece que este **argumento não é válido**. Olhamos para outro exemplo deste argumento.

*Todos os comunistas repudiam discriminação racial.  
Fidel Castro repudia discriminação racial.  
Portanto, Castro é um comunista.*

Neste momento, temos os **pressupostos verdadeiros** e, milagrosamente, a conclusão também é verdadeira. Entretanto, o **argumento continua não válido**. Acontece que, por mera coincidência, escolhemos uma pessoa que repudia racismo e é comunista.

**Tarefa:** Dizemos que o argumento acima não é válido. Por que? Quando podemos afirmar que um argumento é válido?

Fica claro que para “provar” uma conclusão, temos que iniciar com pressupostos verdadeiros e usar argumentos válidos. Estamos, portanto com dois problemas: decidir se as **frases iniciais** são verdadeiras (como?) e ter certeza que nossos **argumentos são válidos** - seja lá o que é isto. Discutiremos a seguir uma lista de regras de lógica que nos permitirão construir argumentos válidos e testar a veracidade de uma frase.

## 2.7.2 As Demonstrações

A demonstração de um teorema é tudo que escrevemos para **conseguir convencer** o leitor que uma vez que assumimos a **hipótese** conseguimos concluir a **tese** do teorema. Existem demonstrações diferentes para um mesmo teorema. Podem ser longas ou curtas. Mas corretas ou erradas todas procuram seguir os princípios do método axiomático, as exigências 1, 2, 3 e 4 que já mencionamos.

As demonstrações se dividem em dois tipos gerais (cada um podendo ainda ser

subdividido, mas não o faremos neste momento): as demonstrações **diretas** e as demonstrações **indiretas**. As diretas são mais frequentes. O esquema geral é de **começar com a hipótese** e dela concluir algo novo; usar isto para concluir outra coisa e assim por diante **até concluir a tese**.

Um exemplo seria uma demonstração de:

*Se  $a$  e  $b$  são inteiros pares, então a soma  $a + b$  é par.*

Uma demonstração direta poderia ser:

*Como  $a$  e  $b$  são pares (por hipótese), existem inteiros  $x$  e  $y$  tais que  $a = 2x$  e  $b = 2y$ . Assim,  $a + b = 2x + 2y = 2(x + y)$  é um inteiro par.*

Começamos com a hipótese e terminamos com a tese. (Fomos “diretos” da hipótese em direção à tese). Na lógica formal, este tipo de argumentação é chamada uma aplicação do *Teorema da Dedução* - para provar que uma **frase condicional** é verdadeira, pode-se **assumir sua hipótese** e, com isso, **provar sua tese**. Assim temos a nossa primeira regra lógica válida.

**Regra de Lógica 1:** Para provar uma frase condicional, é permitido assumir sua hipótese e provar sua tese.

Observe que usando a **regra lógica 1** conseguimos provar que a **frase condicional** é verdadeira, mas não a conclusão da frase isoladamente. Assim é natural perguntar como podemos provar que a **tese** é verdadeira.

*Bem, é natural perguntar como conquistar namoradas(os), mas nem por isso arriscamos a dar palpite.*

No caso de **compor uma demonstração**, as opções e incertezas são igualmente diversas. Entretanto, muitos argumentos usam variantes da seguinte **estratégia**:

Tentamos achar um teorema já provado da forma *A implica em T* onde sabemos que *A* é uma declaração que sabemos ser verdadeira e *T* é a tese que temos. Neste momento aceitamos que *T* tem que ser verdadeira porque é consequência de algo verdadeiro. Este tipo de processo é chamado de *Regra de Inferência* (é a única que usaremos na nossa lógica).

Isto deixa um pouco mais claro porque quase todos os teoremas são apresentados na forma *se A então B*. Esta regra de inferência em especial é chamada de **modus ponens**. Temos assim a

**Regra de Lógica 2:** (modus ponens ou regra de separação) Se *A* e *Se A então B* são verdadeiras então *B* é verdadeira.

Às vezes este tipo de assalto frontal como visto no exemplo de uma demonstração direta não é conveniente. Considere a seguinte declaração (não matemática)

*Se uma pessoa pular dentro de um tanque de água fervendo, ela se queimará.*

Uma demonstração direta seria se colocá-la numa situação na qual a hipótese esteja satisfeita e verificar se a tese é, ou não, satisfeita. Não sabemos de vocês, mas nós não pretendemos pular, de livre e espontânea vontade, dentro de um tanque de água fervendo.

Para examinar a forma de uma **demonstração indireta**, temos que entender bem como funciona uma frase condicional. Para isso devemos regredir ainda mais e examinar o que significa **frase verdadeira** e **frase falsa**. Para começar, devemos concordar que uma

frase não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Para ser verdadeira ou falsa, uma frase tem que **expressar um fato**; comandos (Corre!), perguntas (Você está acordado?) e locuções incompletas (No fundo do mar) não expressam fatos e portanto não são nem verdadeiras nem falsas. Somos, portanto, limitados às frases declarativas. Toda frase declarativa é verdadeira ou falsa? A resposta é não (veja Exercício 2). Assim temos que ter muito cuidado com a construção das nossas frases.

Utilizaremos, inicialmente, somente um tipo de demonstração indireta chamada **demonstração por absurdo** ou se quiser impressionar os outros, **reductio ad absurdum**. Queremos provar que a declaração *Se A então B* é verdade. Tanto na demonstração direta, quanto na indireta, começamos com alguns pressupostos e raciocinamos numa tentativa de concluir que B é verdadeira.

*De repente deparamos com uma frase falsa. Mas como!*

Modus ponens afirma que dado  $P$  e  $P$  implica em  $Q$  são verdadeiras, então  $Q$  é **obrigado** a ser verdadeira. Quer dizer, se começamos com pressupostos verdadeiros e raciocinamos corretamente, só podemos produzir frases verdadeiras. E de repente aparece uma conclusão falsa. Como foi dito, 1 - se começamos com frases verdadeiras e 2 - raciocinamos corretamente, não podemos produzir uma frase falsa!

*Mas lá esta ela. Como chegou? Fizemos algo errado!*

Só fizemos duas coisas, 1 - começamos com umas frases **supostamente** verdadeiras e 2 - raciocinamos com argumentos válidos; portanto,

*ou um dos nossos **pressupostos** era falsa ou pisamos na bola no nosso **raciocínio**.*

Verificamos o raciocínio e concluímos que esta correto. A **única opção** é que nós nos enganamos e pegamos uma **frase falsa como pressuposto**. Temos, deste modo, um modelo para uma demonstração por absurdo.

Uma demonstração por absurdo começa assumindo a hipótese do teorema. Em seguida assumimos a negação da tese. Tudo segue como numa demonstração direta, até chegarmos numa declaração que sabemos ser falsa. Anunciamos que a declaração é falsa e justificamos porque sabemos que é falsa. Assim um dos nossos pressupostos está errado. Como os pressupostos são somente a **hipótese** e a **negação da tese** e a hipótese não é falsa, deve ser a negação da tese. Assim, anunciamos que a **tese é verdadeira**, com justificativa que a negação da tese leva a declarações absurdas.

O esquema das folhas para demonstrações facilita a verificação da validade do nosso raciocínio. Na primeira e segunda linhas coloque a **hipótese** do teorema e a **negação da tese**. Esta afirmação será justificada dizendo que é uma hipótese auxiliar do DPA (Demonstração por Absurdo). (A ordem destas duas afirmações pode ser invertida. De fato, não é obrigatório colocar a negação da tese tão cedo. É conveniente colocá-la já na primeira ou segunda linha, para informar o leitor que pretende construir uma demonstração por absurdo.) Segue-se como numa demonstração direta até chegarmos numa declaração que sabemos ser falsa. Pronto! A demonstração está concluída. Para encurtar a notação, vocês podem simplesmente escrever CMDPA (comprovada pelo método de demonstração por absurdo).

Um exemplo de um teorema que se demonstra por absurdo é

*Não há número racional  $x$  tal que  $x^2 = 2$ .*

(Reformulando na forma se..., então..., temos: *Se  $x$  é um número racional, então  $x^2$  não é 2.*)

Uma demonstração pode seguir esta linha. Seja  $x$  um número racional (confirmamos a hipótese) com  $x^2 = 2$  (negamos a tese). Como  $x$  é racional,  $x$  pode ser escrito como um quociente de dois inteiros  $\frac{a}{b}$ , primos entre si. De  $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ , obtemos  $a^2 = 2b^2$ . Sendo que 2 divide  $2b^2$ , ele divide  $a^2$  e por consequência  $a$ . Assim  $a$  é da forma  $2c$  e temos  $4c^2 = 2b^2$ , ou que implica que  $2c^2 = b^2$ . Repetindo o processo, concluímos que dois divide  $b$ . Mas  $a$  e  $b$  são primos entre si e não podem ter divisor comum não trivial. Chegamos a uma declaração falsa. Portanto  $x^2$  não é 2.

Considerando a discussão acima, estamos aptos a anunciar formalmente uma nova regra de lógica.

**Regra de Lógica 3:** Para provar a declaração *Se  $A$  então  $B$* , é permitido assumir temporariamente que a negação da tese  $B$  é verdadeira e usar a hipótese  $A$  para deduzir uma declaração falsa. Feito isto, é permitido afirmar que a declaração foi provada *por contradição*.

### 2.7.3 A Negação

Nesta regra lógica 3 vemos a palavra **negação**. Vamos examinar o processo lógico de **negar uma declaração**. Inicialmente vamos olhar para alguns exemplos, os dois exemplos contidos nas demonstrações acima:

*Se quisermos negar que um inteiro é par, dizemos que é ímpar. Se quisermos dizer que um número real não é racional, dizemos que é irracional.*

Estes exemplos nos levam a negar a frase *Ela é uma menina* com a frase *Ela é uma velha anciã*. Coitadas de Cíntia e Carla. Elas já passaram por seus dezoito aninhos e não são mais meninas. Quem será o indelicado que as informará que são velhas anciãs? Que história mais absurda esta!

Temos que **ter cuidado** quando negamos uma frase. Se temos uma frase, digamos *Hoje é domingo*, e queremos negá-la, temos que dizer

*Não é o caso que hoje é domingo ou Hoje não é domingo.*

A negação da frase foi efetivada através do **verbo** e não dos complementos predicais como par, racional ou velha.

*Quem disse que pode ser bom de matemática sem ser competente em línguas mentiu!*

Na realidade, a negação correta de

**$x$  é par não é  $x$  é ímpar e, sim,  $x$  não é par.**

A negação de *Hoje é domingo* é *Hoje não é domingo* e não *Hoje é sábado*. É verdade que se hoje é sábado então hoje não pode ser domingo, mas não faça as frases negações uma das outras; isso só faz elas serem incompatíveis.



O que faríamos com *Hoje é segunda feira?* Temos o hábito de negar frases usando complementos como par/ímpar, racional/irracional e dependente/independente etc porque eles subdividem uma classe em **duas** subclasses disjuntas. Por exemplo, um inteiro ou é par ou é ímpar e não as duas coisas ao mesmo tempo. Portanto, dizer que um inteiro não par é a mesma coisa que dizer que é ímpar. No caso de domingo/sábado e menina/anciã, não temos uma classificação completa dos dias ou das mulheres, há outras possibilidades para dias da semana ou de idade.

Moral da história: negar frases simples pelo verbo sempre dá bom resultado, enquanto negar pelo complemento predical pode dar confusão.

Agora que sabemos que a negação de uma declaração simples é feita pondo um não no verbo, o que nos impede de fazer uma dupla negação e colocar dois não's no verbo? *Não não irei.* Ou seja *Não é o caso que não irei.* Que maneira mais estranha de falar.

Vamos trocar a linguagem um pouco. Para negar a frase *Eu compareci na aula*, usaremos um verbo diferente sem usar a palavra *não*. *Eu faltei na aula.* *Faltar* claramente significa *não comparecer*. Portanto, se negamos de novo, diremos, *Eu não faltei na aula*, o que significa que compareci à aula. Em outras palavras dizer *Eu não faltei na aula* é a mesma coisa de dizer *Eu compareci na aula*. *Não é o caso que não estou aqui* significa, nada mais nada menos, que eu estou aqui. Assim, se **negamos a negação** de uma declaração, estamos **afirmando** a declaração. Como queremos trabalhar com um sistema lógico “fechado” onde as regras são bem definidas, esta idéia informal terá que ser transformada numa regra da nossa lógica. Antes disso, é conveniente introduzir a notação  $\sim A$  para representar a negação da frase  $A$ .

**Regra Lógica 4:** Se  $D$  é uma declaração então  $\sim(\sim D)$  tem o mesmo significado que  $D$  podendo-se substituir uma pela outra em qualquer afirmação dentro de uma demonstração.

#### 2.7.4 As Conjunções

Às vezes nós temos duas ou mais declarações  $A, B, C, \dots$  e queremos dizer que várias delas são verdadeiras ao mesmo tempo. Por exemplo, podemos querer dizer que:

*uma bola de futebol é esférica e que uma bola de futebol é feita de couro;* geralmente juntamos esta frase e dizemos que *uma bola de futebol é esférica e feita de couro.*

Isto significa que exigimos da nossa bola pelo menos duas coisas: ser redonda e de couro. Este processo de **juntar** frases, querendo exigir a **veracidade de cada uma** delas é chamado **CONJUNÇÃO** de frases e seu funcionamento é exatamente aquele que usamos na linguagem comum. A conjunção de  $A$  e  $B$  será denotada por  $A$  e  $B$ . Dizemos que a letra **E** entre o  $A$  e o  $B$  é um **conectivo**<sup>11</sup>. Algumas pessoas usam  $A \wedge B$ ; para que introduzir um símbolo complicado para substituir uma simples letrinha?

Vamos agora estudar a **negação de uma frase condicional**. Para isso vamos analisar com cuidado o significado de uma frase condicional.

Dizemos que *Se  $A$  então  $B$*  é verdadeira se  $B$  é verdadeira sempre que  $A$  é verdadeira. Numa demonstração direta, você assume que  $A$  é verdadeira e prova que  $B$  também é. Então terá provado que a frase condicional, *Se  $A$  então  $B$* , é verdadeira.

---

<sup>11</sup>

Suponha agora que alguém lhe apresente uma declaração deste tipo, *Se A então B*, e pergunta se é verdadeira ou não. Se você responde que é, você terá que provar que é, como dissemos acima. Mas se você disser que **não é verdadeira**, o que fará para justificar sua descrença da veracidade?

Uma declaração condicional é como um mecanismo, que cada vez que é alimentado com uma frase verdadeira *A* produz uma frase verdadeira *B*. Se você alega que o “mecanismo” não funciona perfeitamente, isto significa que de vez em quando o mecanismo recebe uma frase **verdadeira** *A* e produz uma **frase falsa** *B*. Se *B* é falsa, sua negação,  $\sim B$ , é verdadeira. Portanto podemos concluir que negar a frase *Se A então B* é a mesma coisa que dizer que *A* é verdadeira e *B* falsa, ou seja, que ***A* e  $\sim B$  são verdadeiras**.

Para facilitar a notação sobre os aspectos formais da estrutura lógica, precisamos introduzir mais uma notação. O símbolo  $A \Rightarrow B$ , diz-se *A implica B*, será usado para denotar *Se A então B*.

Temos assim a seguinte regra,

**Regra de Lógica 5:** A declaração  $\sim(H \Rightarrow T)$  tem o mesmo significado que *H e  $\sim T$* .

Na lógica e na linguagem comum, encontramos outro tipo de **conectivo** entre frases, o conectivo **OU**, quer dizer, a **DISJUNÇÃO**. Todo cuidado é pouco porque o uso de **ou** na matemática não coincide com seu uso coloquial<sup>12</sup>.

*Se alguém perguntar a vocês “Você é homem ou mulher?” o que responderia? João responderia que é homem e Maria que é mulher. Carolina e José, que conhecem melhor as regras da lógica, darão respostas iguais - “Somos sim”. Como é que eles chegaram a esta resposta?*

Na linguagem comum a palavra **ou** é usada para denotar uma **escolha** entre duas opções: é brasileiro ou estrangeiro? é azul ou laranja? é aberto ou fechado? Quer dizer devemos escolher entre uma ou outra das coisas. Esta concepção da palavra **ou** é a mais usada na linguagem comum, mas tem seus problemas.

*O que você faz com a seguinte frase: Santa Catarina é um estado do sul do Brasil ou Natal cai no dia 25 de dezembro. Qual vai escolher? Muda-se a data do Natal ou enviamos Santa Catarina para o norte do Brasil? Você se defende dizendo que, devido ao contexto das frases, nunca faria esta disjunção.*

*Será que na matemática você tem conhecimento de **antemão** do contexto das frases? Pode acontecer (e não poucas vezes) que não.*

Na matemática damos um **único** significado à disjunção. Dizer que a disjunção de duas frases é verdadeira é a mesma coisa que dizer que, **pelo menos**, uma delas (ou as duas) é verdadeira.

Assim frases como *você é homem ou você é mulher* e *Brasil é país sul americano ou Natal cai no dia 25 de dezembro* são simplesmente exemplos de frases verdadeiras. Na primeira **uma** das partes será sempre verdadeira e na segunda **ambas** são verdadeiras. Se vocês pensarem bem sobre o uso de “ou” na linguagem comum, vocês encontrarão momentos (poucos e infrequentes que sejam) onde se usa “ou” neste sentido diferente.

Se estamos introduzindo este sistema axiomático para eliminar imprecisões no nosso desenvolvimento da geometria, não podemos ter dúvidas a respeito do uso de uma palavra.

---

12

Vamos ignorar o uso de “ou” para designar escolha e aceitar somente o uso “matemático” mencionado no início deste parágrafo.

Você pode se perguntar porque os matemáticos escolheram este uso de “ou”. Vamos justificar nosso uso de “ou” com o seguinte argumento. Concordamos com significado da seguinte declaração:

*Para ser uma bola de futebol, um objeto tem que ter a forma esférica e para ser uma bola de futebol um objeto tem que ser feito de couro.*

Suponha que você quer trazer algo que não é uma bola de futebol. Que tipo de cuidados deve ter com seu objeto para ter certeza que **não** é uma bola? Isto é, quais coisas deve verificar para afirmar que a exigência acima **não é satisfeita** para seu objeto? (*Uma pequena observação: falamos no singular, “a exigência”, porque a conjunção das duas exigências produz uma só que engloba as duas. “Dois e dois [no sentido de soma] é quatro” e não “são quatro”.  $2 + 2$  é mais que um número para ser usado no plural?*)

A idéia da **conjunção** de frases é de colocar as exigências de cada fator em cadeia, uma atrás da outra, como os elos numa corrente, e formar uma frase nova que é verdadeira se e somente se **cada** fator da conjunção é verdadeira. A conjunção deixa de ser verdadeira quando pelo menos um dos seus fatores é falso.

*Lembra-se do ditado popular: “a corrente é tão forte quanto seu elo mais fraco”. Basta quebrar um elo (fator da conjunção) que a corrente (frase conjunção) quebra (é falsa).*

Assim, se A é falsa concordamos que A e B é falsa. Também, se B é falsa, concordamos que A e B é falsa. Quer dizer A e B é falsa se um dos seus fatores ou A ou B é falso. (Mordeu a isca? Cuidado porque dentro da isca tem um enorme anzol que usaremos para lhe fisgar.)

Retornando ao problema da bola de futebol, de repente você encontra um cubo de aço e pergunta se é uma bola de futebol. É claro que você quer dizer que não é. Por outro lado, você está preocupado em justificar seus argumentos cuidadosamente com base nas regras de lógica. Se você insiste em pensar em “ou” como uma escolha, você não poderá decidir qual das duas exigências escolher como a falsa, porque as duas são falsas! Assim precisamos que o nosso “ou” tenha o significado matemático, ou seja, da aceitação de um ou mais dos fatores.

Além de justificar nosso uso do “ou”, identificamos também outra regra lógica.

**Regra Lógica 6:** A declaração  $\sim(A \text{ e } B)$  tem o mesmo significado que  $(\sim A) \text{ ou } (\sim B)$ .

### 2.7.5 Os Quantificadores

Temos mais regras a respeito da negação, mas antes vamos falar de **variáveis** e **quantificadores**. Eles vão permitir que as declarações sejam extendidas para muitos casos, não somente para um em particular.

Freqüentemente falamos em termos específicos ou absolutos: por exemplo, podemos dizer

*Ana é mulher; vermelho é uma cor; Brasil está na América do Sul.*

Nestas frases demos “nomes aos bois”, *Ana*, *vermelho*, *Brasil*, e não há qualquer espaço para manobra. Este tipo de terminologia é bom para situações específicas, mas na matemática, e às vezes na vida comum, freqüentemente falamos de situações gerais com a possibilidade do uso

de muitos objetos dentro de um conjunto. Neste caso usamos o que chamamos de **variáveis** para representar elementos não genéricos de uma classe.

Um exemplo de uma frase específica seria

*O triângulo com lados  $3m$ ,  $4m$ , e  $5m$  é um triângulo retângulo porque  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .*

Uma generalização desta frase que usa variáveis tem a forma

*Se um triângulo tem lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  com  $a^2 + b^2 = c^2$  então é um triângulo retângulo.*

Nesta última frase vemos que podem haver muitos triângulos retângulos com tamanhos diversos e não somente 3 por 4 por 5 como na primeira frase. As variáveis  $a$ ,  $b$  e  $c$  **assumem valores** dentro da classe<sup>13</sup> de números reais positivos e podem variar de um triângulo para outro.

As **variáveis** podem aparecer numa forma simples como no exemplo acima ou podem ser **quantificadas**. Há duas maneiras de quantificar uma variável, **existencialmente** ou **universalmente**.

Quantificar uma variável existencialmente, como indica o nome, significa exigir que **exista** um valor (da variável) dentro de um conjunto (domínio) de valores para o qual a exigência da frase é satisfeita. Exemplo:

*Há um número real positivo  $x$  tal que  $x^2 = 2$ .*

A variável  $x$  que assume valores no conjunto de números reais positivos (domínio) é quantificada existencialmente porque afirmamos que **há um** deles (número real positivo) que satisfaz algo: tem o quadrado igual a dois.

Quantificar uma variável universalmente significa que atribuir uma propriedade a **todas** as coisas num conjunto; quer dizer, aquela propriedade é universalmente satisfeita pelos possíveis valores da variável. Um exemplo de uma frase com uma variável quantificada universalmente é

*Cada número positivo  $x$  é o quadrado de um número real.*

Temos uma variável, representada por  $x$ , que assume valores no conjunto dos números positivos; temos a propriedade de que  $x$  é o quadrado de um número; afirmamos que cada  $x$  satisfaz esta propriedade, ou seja, que esta propriedade é **universalmente** válida para os  $x$  naquele domínio.

A noção de generalidade que acabamos de ver é algo que faz parte do nosso senso comum. Até usamos ela constantemente em nosso dia-a-dia. Mas agora vamos ver uma possibilidade da qual não estamos acostumados: quando o conjunto que estamos considerando é **vazio**.

Considere as declarações

*Todos os unicórnios têm chifre na testa;  
Todos os triângulos com quatro lados têm área 3 metros quadrados.  
Todo número real cujo quadrado é um número negativo é maior que mil.*

---

<sup>13</sup> sinônimo de conjunto

Veja que as três frases são **verdadeiras** mas nem por isto existem unicórnios ou triângulos com quatro lados ou que temos somente números reais acima de mil. Lembre-se que, numa frase com uma variável universalmente quantificada, estamos dizendo que todos os (cada) elementos de uma classe têm uma propriedade, mas nunca afirmamos que a classe tinha elemento dentro dela!

O fato de que não há nenhum valor da variável satisfazendo a propriedade nos diz que estamos afirmando algo sobre o **nada**, e então podemos afirmar **qualquer coisa** sem estar faltando com a verdade.

Este fato não é muito fácil de admitir no início mas aos poucos você verá que é simples e até bem razoável, apenas que você nunca havia se deparado com esta situação antes.

Vamos ver agora como **negar** uma declaração que usa quantificadores, que provavelmente é a atividade lógica mais difícil para o aluno. Acima, vimos que frases são negadas através da colocação de um “não” no verbo. Estávamos trabalhando com frases simples sem quantificadores ou conectivos e a regra era válida naquele contexto. Com quantificadores a coisa não é tão simples assim. Considere a frase

*Todo homem é forte.*

Sua negação **não** é

*Todo homem não é forte.*

Já mencionamos um “estilo” para construir a negação de uma frase que funciona em qualquer circunstância (com ou sem quantificadores). Usando esta técnica, a negação da frase fica

*Não é o caso que todo homem é forte.*

Muito bem, vamos adiante. O que precisamos fazer agora para **provar** que esta última afirmação é verdade? Sem a negação, podemos dizer que a exigência é a seguinte:

cada vez que um homem aparecer na sua frente, você consegue provar que ele é forte.

Agora ao negar a frase, estamos afirmando que você não conseguirá executar esta tarefa, ou seja, irá **falhar** em pelo menos um caso. Para isto, basta mostrarmos um refugiado destes que vemos nas notícias com 2 metros de altura, 35 anos de idade e 45 quilos de peso. Você está obrigado a provar que ele é forte mas você fatalmente fracassará nas suas tentativas. Daí, estaremos convencidos (e vocês também esperamos) que a negação da frase é verdadeira, **pelo menos** para aquela escolha da variável. Vemos assim que negar uma frase do tipo

*Para cada  $x$ ,  $A(x)$*

é a mesma coisa que afirmar que **há um**  $x$  para o qual  $A(x)$  é falsa. (ou então que  $\sim A(x)$  é uma frase verdadeira). Logo a negação da frase acima fica:

*Existe  $x$  tal que  $\sim A(x)$*

Portanto temos mais uma regra lógica que usaremos com frequência.

**Regra Lógica 7:** A negação da declaração *Para cada  $x$ ,  $A(x)$*  tem o mesmo significado que a declaração *Existe  $x$  tal que  $\sim A(x)$* .

E como funciona a negação de frases com variáveis quantificadas **existencialmente**? Se você tem uma frase do tipo

*Existe  $x$  tal que  $A(x)$*

e afirma que é verdadeira, o que precisa fazer para prová-la? Você tem que achar um  $x$  específico dentro do domínio da variável tal que a frase  $A(x)$  é verdadeira.

Por exemplo, para provar a frase

*Existe um número real  $x$  tal que  $x^2 = 2$*

você tem que exibir o número  $\sqrt{2}$  que tem a propriedade exigida. Se negarmos a afirmação acima, nós estaremos alegando que você não terá êxito na sua tarefa. Quer dizer, **cada vez** que você escolher um número  $x$  a propriedade (que  $x^2 = 2$ ) **não será satisfeita** - o quadrado do número  $x$  não será 2. Se para aquele  $x$  escolhido a propriedade  $A(x)$  é falsa então  $\sim A(x)$  é verdade. Assim, ao negar a frase, afirmamos que: para cada  $x$ ,  $\sim A(x)$  é verdadeira. Logo temos a seguinte regra lógica:

**Regra Lógica 8:** A negação da frase *Existe  $x$  tal que  $A(x)$*  tem o mesmo significado que *Para cada  $x$ ,  $\sim A(x)$* .

## 2.7.6 Mais Algumas Regras Lógicas

Vejam mais uma lista de regras lógicas algumas das quais já mencionamos acima e mais algumas que são combinações das que já vimos. Queremos deixar as regras que usaremos bem explicitadas, afinal, no nosso método axiomático, queremos que tudo siga de maneira racional e com **justificativas explícitas**.

### Regra Lógica 9:

- a) (*uso do “ou”*) Se  $P$  é verdadeira, qualquer que seja a afirmação  $Q$ , é válido concluir que  $P$  ou  $Q$  é verdadeira; Se  $Q$  é verdadeira, qualquer que seja a afirmação  $P$ , é válido concluir que  $P$  ou  $Q$  é verdadeira; Se  $P$  ou  $Q$  é verdadeira é válido concluir que uma das duas ou  $P$  ou  $Q$  é verdadeira. (Nosso problema é que podemos não saber qual!);
  
- b) (*uso do “e”*)  
Se  $P$  e  $Q$  é verdadeira, é válido concluir que  $P$  é verdadeira;  
Se  $P$  e  $Q$  é verdadeira, é válido concluir que  $Q$  é verdadeira;  
Se  $P$  é verdadeira e se  $Q$  é verdadeira, é válido concluir que  $P$  e  $Q$  é verdadeira;
  
- c) Se  $\sim Q \Rightarrow \sim P$  é verdadeira é válido concluir que  $P \Rightarrow Q$  é verdadeira;
  
- d) Se  $P \Rightarrow Q$  é verdadeira e  $Q \Rightarrow R$  é verdadeira, é válido concluir que  $P \Rightarrow$

$R$  é verdadeira;

- e)  $(A \text{ ou } B) \Rightarrow C$  é a mesma coisa que  $(A \Rightarrow C) \text{ e } (B \Rightarrow C)$ ;
- f) Se (para qualquer  $x$  em  $D$ ),  $A(x)$  é verdadeira e  $y$  é um membro de  $D$  então  $A(y)$  é verdadeira;
- g) (Existe  $x$  em  $D$ ) tal que  $A(x)$  é verdadeira se e somente se podemos encontrar  $y$  em  $D$  tal que  $A(y)$  é verdadeira.

Nesta regra a **linha a)** nada mais é que a formalização do nosso “ou” matemático que  $P$  ou  $Q$  é verdadeira se e somente se um dos seus fatores é. A **linha b)** é a formalização do acordo que  $P$  e  $Q$  é verdadeira quando e somente quando ambas  $P$  e  $Q$  são verdadeiras. A **linha c)** não é absolutamente necessária como regra formal. Ela é conhecida como a **Contra-Positiva** e pode ser provada usando uma demonstração por contradição. A **linha d)** confirma que podemos enfileirar nossas conclusões tanto quanto quisermos.

A **linha e)** nos permite usar uma técnica do tipo *dividir e conquistar* para dividir frases gerais em casos especiais mais fáceis de provar.  $(A \text{ ou } B) \square C$  somente pode ser falsa se  $(A \text{ ou } B)$  é verdadeira e  $C$  é falsa. Neste caso uma das frases  $A$  ou  $B$  é verdadeira; se for  $A$ , então  $(A \Rightarrow C)$  é falsa e se for  $B$ , então  $(B \Rightarrow C)$  é falsa. De qualquer jeito a conjunção  $(A \Rightarrow C) \text{ e } (B \Rightarrow C)$  é falsa porque pelo menos um dos seus fatores é falso. A recíproca, isto é,  $(A \Rightarrow C) \text{ e } (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \text{ ou } B) \Rightarrow C)$  segue um raciocínio análogo.

A **linha f)** é um tipo de *modus ponens* para frases **universais**. Com esta regra, podemos tratar a comprovação desta afirmação universal como uma frase condicional:

*Se  $x$  é um membro de  $D$  então  $A(x)$  é verdadeira.*

A **linha g)** é auto explicativa; se a frase **existencial** é verdadeira, então a propriedade é satisfeita por algum membro do domínio e vice-versa.

Os matemáticos e os políticos não são bons companheiros. O político passa sua vida toda tentando se esquivar de uma definição exata da sua posição sobre um assunto. O lema deles parece ser

*tenho uma posição firme sobre o assunto que nem é a favor nem é contra, mas muito pelo contrário.*

Esta filosofia pode evitar que o político irrite certos grupos de eleitores, mas não é compatível com o rigor que queremos no nosso método axiomático. Nós incluímos uma regra que é freqüentemente chamada de **exclusão do meio termo**.

<ABRIR QUADRO-DESTAQUE> **Regra Lógica 10:** Para cada declaração  $P$ ,  $P$  ou  $\sim P$  é verdadeira e  $P$  e  $\sim P$  é falsa.<FECHAR QUADRO-DESTAQUE>

Esta regra diz que, dada uma declaração  $P$ , ela não pode ser ambígua<sup>14</sup>; das duas uma, ou ela é verdadeira ou ela é falsa. Por serem negações uma da outra, se uma delas é verdadeira, a outra é falsa; assim a Regra 9 nos permite dizer que  **$P$  e  $\sim P$  é sempre falsa**. Esta regra separa as frases que têm a propriedade de serem ou verdadeiras ou falsas das frases em geral.

---

14

## 2.8 A Folha Demonstrativa

Nº _____	_____ Teorema      _____ Lema	
Hipótese:		
Tese:		
Demonstração		
Afirmação	Justificativa	
<p>Nesta coluna você escreverá as <b>afirmações que usar na demonstração do teorema.</b></p> <p>Lembre-se que estas afirmações são, antes de mais nada, frases completas, bem formadas gramaticalmente. Estas afirmações deverão ser listadas uma por uma e <b>enumeradas.</b></p> <p>Opcionalmente você poderá escrever subtítulos, sem enumeração, para organizar a sua demonstração</p>	<p>Nesta coluna você escreverá um conjunto de justificativas para cada afirmação feita na coluna à esquerda.</p> <p>Cada conjunto de justificativas deverá receber um número, o mesmo número que a afirmação a que se refere no lado esquerdo.</p> <p>Lembre-se que as justificativas deverão provar a veracidade da afirmação à esquerda.</p>	

## 2.9 Como Demonstrar um Teorema?

Muitos alunos perguntam como desenvolver as demonstrações. Esta é uma pergunta **impossível** de ser respondida. Desenvolver uma demonstração é um **ato criativo**, envolvendo intuição, inspiração, dedicação e imaginação em nada diferente do processo usado por um pintor, escritor ou compositor.

Outra qualidade em comum com estes é a necessidade de bastante trabalho e muitas tentativas, erros e novas tentativas até alcançar o objetivo.

O que podemos oferecer é um esquema para uma demonstração oferecida aparentemente pela primeira vez por Proclus.

Ele afirma que cada teorema tem as seguintes elementos: *anúncio* (ou **πρότασις**), *clarificação* (**ἔκθεσις**), *definição* ou *especificação* (**διορισμός**), *construções e resultados de apoio* (**κατασκευή**), *demonstração* (**ἀπόδειξις**) e *conclusão* (**ἀπόδειξις**).

O **anúncio** consiste na declaração do teorema, incluindo ambos as hipóteses e teses. É



óbvio que não há qualquer possibilidade de provar um teorema se não se sabe o que é o teorema. A **clarificação** consiste da declaração da hipótese e a seu esclarecimento e reformulação em termos mais adequados para o assunto em pauta. A **definição ou especificação** declara a tese e esclarece dúvidas sobre o seu sentido exato que inclui, entre outras coisas, ter **em mão as definições de todos os termos técnicos usados**. As **construções e resultados de apoio** são exatamente isto. Sempre que possível, faz-se um **desenho** da informação das hipóteses; freqüentemente, este desenho por si só mostra o caminho para a tese. Em seguida, buscar entre os teoremas e exercícios já provados aqueles ligados com a hipótese ou tese. Por último, oferecer um esboço, a largos passos, de o que pretende converter em demonstração. Em demonstrações simples, a listagem de teoremas úteis pode ser o suficiente para marcar o caminho da demonstração; em outros casos mais complicados, deve depender na sua experiência e intuição para bolar uma estratégia. Esta estratégia é de fundamental importância para evitar que se perca em detalhes e se desvie do rumo que o levará à conclusão. Ao final, um construtor ao iniciar a construção não começa determinando quantos pregos ele vai usar; começa bolando um cronograma de atividades de grande porte, podendo cada uma destas ser **destrinchadas no momento adequado**. Pelo menos não tentará fazer os acabamentos no terceiro andar antes de terminar a fundação, nem se prender tanto a cavar para as fundações que acaba por criar uma enorme cratera e não um edifício.

*Tarefas grandes requerem planejamento em todas as outras áreas, porque seria diferente na Matemática?*

Estando ciente dos teoremas que podem ser úteis e tendo um plano de ação, você deve encorpar este plano e construir a demonstração. Por favor, depois de falar por horas ou escrever páginas e páginas informe o resultado final; deve se concluir a demonstração informando explicitamente que a **tese foi obtida** e, portanto, o teorema foi demonstrado.

## 2.10 Exercícios Resolvidos e Propostos:

1) Identifique pelo menos seis (cinco além do exemplo) estruturas gramaticais usadas freqüentemente na língua portuguesa que são alternativas para a estrutura *Se ... então...* . (Por exemplo *... desde que ...* ) Para cada estrutura identifique tese e hipótese nesta estrutura.

Resposta (parcial):

1. A acontece quando B acontece. Hipótese: B, tese: A
2. A acontece somente quando B acontece. Hipótese: A, tese: B

2) Um adjetivo é chamado *autológico* se a propriedade expressada pelo adjetivo se aplica à própria palavra. Por exemplo, *multissilábica* é um adjetivo e a palavra *multissilábica* é uma palavra multissilábica (tem cinco sílabas); Portanto, *multissilábica* é uma palavra autológica. *Monossilábica*, entretanto não é monossilábica e, portanto não é autológica. Um adjetivo que não é autológico é chamada *heterológica*.

Provar que as seguintes frases declarativas não podem ser nem verdadeiras nem falsas.

- i) *Esta frase é falsa.*
- ii) *Heterológica é heterológica.*

3) Identificar cinco estruturas gramaticais para representar a **quantificação universal** de uma variável e dar um exemplo de cada uma. Repita o exercício identificando alternativas para representar o **quantificador existencial**.

4) Para cada frase a seguir determine se é condicional, bicondicional, “existencial”, “universal” ou nenhuma destes. Se é condicional, identifique hipótese e tese.

a) Rosas são vermelhas.

*R: universal, condicional. Hip: A é uma rosa. Tese: A é vermelha.*

b) Se  $x$  é um número não nulo então  $x^2$  é maior que zero.

*R: condicional, universal. Hip: .... Tese:*

c) Se você comer seu espinafre, você crescerá forte e saudável.

d) Gloria é uma moça agradável, quando está de bom humor.

e) Serviremos um lanche quando o relógio bater quatro horas.

f) Jorge e Sandro vão ao mercado.

g) Nem todos os convidados chegaram na hora marcada.

h) O Brasil terá que desvalorizar a sua moeda ou sofrerá ataques de capital especulativo.

i) Alguém vai ser aprovado nesta disciplina.

j) Todos os números não nulos tem quadrado maior que zero.

k) Dizer que um conjunto de vetores gera um espaço é a mesma coisa que dizer que cada vetor do espaço pode ser expresso como uma combinação linear deles.

l) A função  $f$  é contínua no ponto  $x$  do seu domínio significa que, para cada  $\varepsilon$  maior que zero, existe um  $\delta$  maior que zero tal que se  $y$  é ponto do domínio e a distância entre  $x$  e  $y$  é menor que  $\delta$ , então a distância entre  $f(x)$  e  $f(y)$  é menor que  $\varepsilon$ .

5) Negue as frase do Exercício 4 dos itens a) a k).

*R:*

a) *Não é verdade que as rosas são vermelhas;*

*As rosas não são vermelhas.*

b) *Existe um numero  $x$  não nulo tal que seu quadrado ( $x^2$ ) não é maior que zero.*

c) *Você pode comer seu espinafre e não vai crescer forte e saudável.*

6) Construa **folhas de demonstração** para os dois exemplos de demonstrações apresentados neste capítulo (soma de pares e raiz quadrada de 2).

*R: Se  $a$  e  $b$  são inteiros pares, então a soma  $a + b$  é par.*

Tente fazer o segundo exemplo de demonstração:

*Não há número racional  $x$  tal que  $x^2 = 2$ .*

*É importante você fazer tentativas iniciais somente usando sua capacidade de raciocínio. Na medida que as dificuldades impeçam que você vá adiante olhe a resposta no fim do capítulo o suficiente para ultrapassar a dificuldade que você sentiu. Então volte a tentar por si mesmo. No final retorne e procure entender bem cada passo.*

7) Resgate todas as suas notas de aula do Laboratório I e revise a parte relevante a negação e quantificadores.